DDays 2012.

DANCE

Dinámica, Atractores y No linealidad: Caos y Estabilidad

Benicàssim, 24-26 Octubre 2012

COMITÉS

COORDINADORES

- Lluís Alsedà (Universitat Autònoma de Barcelona)
- Enrique Ponce (Universidad de Sevilla)

COMITÉ CIENTÍFICO

- Casas Pérez, Fernando (Universitat Jaume I)
- Martínez-Seara Alonso, María Teresa (Universitat Politècnica de Catalunya)
- Núñez Jiménez, Carmen(Universidad de Valladolid)
- Rodriguez Méndez, José Ángel (Universidad de Oviedo)

COMITÉ ORGANIZADOR LOCAL

- Campos Sancho, Beatriz (Universitat Jaume I)
- Chiralt Monleón, Cristina (Universitat Jaume I)
- Vindel Cañas, Pura (Universitat Jaume I)

PROGRAMA

Miércoles		*Jueves*		*Viernes*	
		9-9.45	R. Obaya	9-10	N. Fagella
		9.45-10.30	A. Guillamón	10-10.30	A. Garijo
		10.30-11	Café	10.30-11	Café
		11-11.45	A. Roxin	11-11.30	X. Jarque
				11.30-12	A. Cordero
		12-12.45	E. Ponce	12-12.30	Clausura
12-14	RECEPCIÓN	12.45-13.30	M. Jeffrey		
		13.30-14.30	Asamblea DANCE		
15.30-16	Apertura				
16-16.45	C. Simó	16-16.45	A. Granados		
16.45-17.30	A. Vieiro	16.45-17.15	Café		
17.30-18	Café	17.15-19.15	Sesión de Tesis		
18-18.45	A. Pumariño				

SESIONES CIENTÍFICAS

Sesion 1: Bifurcaciones globales: dinámica asociada a fenómenos homoclínicos

Responsables: A. Pumariño, J. C. Tatjer

- *From steady solutions to chaotic flows in a Rayleigh-Bénard problem at moderate Rayleigh numbers.*

  C. Simó.

- *A global quantitative study of 2D dissipative diffeomorphisms with a homoclinic figure-eight.*

  A. Vieiro.

- *Models for return maps near a generalized homoclinic tangency for 3D diffeomorphisms.*

  A. Pumariño, J. C. Tatjer.

Sesion 2. Redes neuronales

Responsables: Sylvia Novo, Emilio Freire

- *Dinámica no-autónoma con aplicaciones en redes neuronales de tipo Hopfield*

  Rafael Obaya

- *Neural synchrony tools derived from invariant manifolds*

  Toni Guillamon

- *The role of higher order connectivity statistics in shaping neuronal network dynamics*

  Alexander Roxin

Sesion 3: Sistemas non-smooth

Responsable: Enric Fossas

- *Piecewise linear differential systems: twenty years on.*

  Enrique Ponce.

- *On energy accumulation in a class of piecewise-defined Hamiltonian systems.*

  Albert Granados.

- *A doorway to explosions, bifurcations, and uncertainty in higher dimensions – unfolding the singularities of nonsmooth dynamics.*

  Mike Jeffrey.

Sesion 4: Dinámica compleja
Responsables: Xavier Jarque, Nuria Fagella

- *Cirugía cuasiconforme de los sistemas dinámicos holomorfos.*

  Nuria Fagella.

- *Perturbaciones singulares de los sistemas dinámicos complejos.*

  Toni Garijo.

- *Conectividad del conjunto de Julia para funciones meromorfas.*

  Xavier Jarque.

- *Dinámica de la familia de métodos de Chebyshev-Halley.*

  Alicia Cordero.

SESIÓN DE TESIS

- *Contribution to the Dynamics of a Solar Sail in the Earth - Sun System.*

  Ariadna Farrés.

- *Conexiones Globales y Comportamientos Periódicos en Sistemas Dinámicos Lineales a Trozos .*

  Elisabeth García Medina.

- *Local Monomialisation of generalized analytic functions.*

  Rafael Martín Villaverde.

- *Study of the structure of chaotic eigenfunctions in a scar function basis set.*

  Fabio Revuelta Peña.

- *Improving the numbers: A new generation of ODE solvers and Computer Assisted Proofs.*

  Marcos Rodríguez.

Abstracts

Dinámica de la familia Chebyshev-Halley sobre polinomios de grado dos

A. Cordero

Departamento de Matemática Aplicada. Universidad Politécnica de Valencia

La familia de métodos numéricos de tipo Chebyshev-Halley viene dada por

$$G(z) = z - \left(1 + \frac{1}{2}\frac{L_f(z)}{1 - \alpha L_f(z)}\right)\frac{f(z)}{f'(z)}. \tag{1}$$

donde

$$L_f(z) = \frac{f(z)\, f''(z)}{(f'(z))^2}, \tag{2}$$

y α es un parámetro complejo.

Al aplicar este operador a un polinomio cuadrático se obtiene la familia de funciones racionales

$$O_p(z) = z^3 \frac{z - 2(\alpha - 1)}{1 - 2(\alpha - 1) z}. \tag{3}$$

En este trabajo empezamos el estudio dinámico de esta familia de funciones racionales. Al dibujar el plano de parámetros aparece un conjunto singular, que llamamos el conjunto gato. Se obtiene que, para determinados valores del parámetro, la convergencia del método a las raíces del polinomio depende del valor inicial elegido.

De hecho, se demuestra la existencia de puntos fijos del operador que no son las raíces del polinomio y que son atractores para determinados valores del parámetro, así como la de órbitas periódicas que también son atractoras.

Cirugía quasiconforme en los sistemas dinámicos holomorfos

N. Fagella

Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi Universitat de Barcelona

La cirugía es una técnica cuyo objetivo es construir funciones holomorfas con una dinámica predeterminada. Esta técnica se encuentra detrás de la mayoría de resultados importantes en dinámica holomorfa de los últimos 30 años. En esta charla explicaremos, sin entrar en detalles demasiado técnicos, en qué consiste la cirugía, cuáles son los distintos tipos de cirugía que existen y, explicaremos algunas de sus aplicaciones más relevantes.

Perturbaciones singulares de sistemas dinámicos complejos

A. Garijo

Departament d'Enginyeria Informàtica i Matemàtiques. Universitat Rovira i Virgili

Presentaremos el sistema dinámico complejo generado por la familia de funciones racionales $z^n + \lambda/z^n$ donde $n > 1$. Esta familia de funciones racionales presenta una gran variedad de comportamientos dinámicos. Para ciertos valores de los parámetros el conjunto de Julia puede ser: un conjunto de Cantor, una copia de una alfrombra de Sierpinski o un conjunto de Cantor de círculos.

On energy accumulation in a class of piecewise-defined Hamiltonian systems

A. Granados

IPVS, University of Stuttgart, Stuttgart, Germany

In this talk we consider the coupling of two piecewise-defined Hamiltonian systems, each obtained as a generalization of a model of the rocking block, and study certain properties related to instabilities caused by energy accumulation under periodic perturbations.

The rocking block is not only a paradigm of a mechanical system with impacts, but also it is used to model the behaviour of slender structures under an external forcing, such as water tanks or nuclear fuel rods under earthquake excitation. In addition, the stacked coupling of such blocks is also of interest for the modeling of structures in civil engineering or nano carbon tubes under small vibrations.

When coupling two rocking blocks through a generic Hamiltonian perturbation which also includes the non-autonomous periodic forcing, we obtain a 5-dimensional piecewise-defined Hamiltonian system with two switching manifolds. We then focus on the configuration given by large amplitude oscillations for one block while the other one oscillates with higher frequency and smaller amplitude. For the unperturbed case, this mode of operation is associated with 4-dimensional C^0 heteroclinic manifolds between 3-dimensional manifolds that are only continuous.

By means of the impact map onto the switching manifold associated with the fast rocking block, we prove the persistence of these manifolds, derive sufficient conditions for the existence of heteroclinic transversal intersections and construct the so-called scattering map. It associates asymptotic dynamics on the 3-dimensional manifolds through heteroclinic connections. The properties of this map allow us to show that, under certain conditions, for any arbitrarily small amplitude of the periodic forcing, energy is accumulated on the fast rocking block at every large oscillation of the slow motion rock. This allows us to construct an heteroclinic skeleton that, when shadowed, the system becomes unstable in large time scales by further accumulating energy, hence leading to Arnold diffusion.

Neural synchrony tools derived from invariant manifolds

Toni Guillamon

Departament de Matemàtica Aplicada I, EPSEB, Universitat Politècnica de Catalunya

In this talk we will focus on dynamical systems tools motivated by research problems in neuroscience. We will first overview questions originated both from large network simulations, modeling of cognitive processes and synchronization properties of individual cells.We will devote the second part of the talk to explain in more detail one of these examples, namely, the role of invariant manifolds in controlling the phase of an oscillator such as a spiking neuron. Experimentally, the phase advancement under external stimuli or coupling to other neurons is mostly computed through phase response curves (PRCs) obtained from recordings of the time variations in reaching the next peak of the membrane potential; successful methods have been used to predict it by means of theoretical PRCs evaluated on the attractor (limit cycle). However, stimulation in transient states may induce phase advancements that differ from the predictions given in the asymptotic state. By computing the isochrons (curves of constant phase) in a vicinity of the limit cycle, we are able to accurately generalize the PRCs to the transient states and, as well, to provide a methodology to compute the phase advancement under any type of stimulus (weak or strong, instantaneous or longlasting), see [1]). We will finish by illustrating the implications of our results to synchrony prediction in systems under high-frequency periodic stimuli by means of the study of rotation numbers for 2D maps derived from the extended PRCs. [2])

References

1. A. Guillamon and G. Huguet. A computational and geometric approach to phase resetting curves and surfaces, SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 8 (2009), 1005-1042.

2. O. Castejòn, A. Guillamon and G. Huguet. Two-dimensional phase resetting maps, preprint (2012).

Connectividad del conjunto de Julia

X. Jarque

Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi Universitat de Barcelona

Es bien conocida la dicotomía del conjunto de Julia para polinomios cuadráticos. Esto es, el conjunto lleno de Julia (aquellos puntos del plano complejo que tiene órbita acotada) para la familia $P_c(z) = z^2 + c,\ c \in \mathbb{C}$ es o bien un conjunto totalmente disconexo (es un conjunto de Cantor) o bien es un conjunto conjunto conexo. Además la dicotomía se puede caracterizar dinámicamente: el primer caso corresponde a los valores del parámetro para los que la órbita del punto crítico es no acotada mientras que el segundo corresponde a los valores del parámetro para los que la órbita del punto crítico es acotada. Mostraremos condiciones dinámicas para asegurar que el conjunto de Julia de funciones racionales, enteras o meromorfas sea un conjunto conexo.

A doorway to explosions, bifurcations, and uncertainty in higher dimensions -unfolding the singularities of non-smooth dynamics

M. Jeffrey

Engineering Mathematics Department, University of Bristol.U.K.

After half a century, the dynamics of piecewise-smooth vector fields continues to throw out surprises. Interest in generic features of piecewise smooth systems continues to grow with applications to systems with switching, friction, and many other sharp transitions, such as decision making. Discontinuities make it difficult to assign generic properties to broad classes of systems, particularly in higher dimensions. New notions such as sliding bifurcations and explosions go some way to filling the void, but make it vital to confront a problem of uncertainty in non-smooth dynamics: both in the form of attractors born in bifurcations, and in the breakdown of determinism that ushers in a new kind of chaos.

Dinámica no-autónoma con aplicaciones en redes neronales de tipo Hopfield

Rafael Obaya García

Dpto. Matemática Aplicada. Universidad de Valladolid, Spain

Analizaremos redes neuronales de tipo Hopfield con interconexiones casi-periódicas, descritas por ecuaciones funcionales de retardo finito. Revisaremos resultados recientes de la teoría monótona de sistemas dinámicos no autónomos con aplicaciï¿½n en estos modelos. Comprobaremos algunas propiedades físicas relevantes como el carácter estabilizante de las autoconexiones inhibitorias o de las entradas en el sistema de signo constante en los modelos monótonos.

Piecewise linear differential systems: twenty years on

E. Ponce

Departamento de Matemática Aplicada II. Universidad de Sevilla

The analysis of piecewise linear vector fields and their possible bifurcations goes back to the Russian school of Andronov and co-workers, in the thirties of the past century. In the last twenty years however, there has been an upsurge in the interest for its analysis, due to new modelling applications of these systems. The lack of smoothness in piecewise linear differential systems precludes the application of the available general results from differentiable dynamics, so that new specific techniques are to be developed, typically in a case-by-case approach.

A review of the main contributions of our group to the analysis of piecewise linear differential systems during the past two decades is planned. Our motivation comes mainly from the study of basic oscillatory circuits in non-linear electronics and low-dimensional non-linear control systems, but also includes some biological models for neuronal cell activity. In particular, several mathematical results related to the bifurcation of limit cycles in planar and three-dimensional systems will be shown.

Models for return maps near a generalized homoclinic tangency for 3D diffeomorphisms

Antonio Pumariño
Departamento de Matemáticas
Universidad de Oviedo

Joan Carles Tatjer
Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi
Universitat de Barcelona

Abstract

One of the most important sources of complicated behaviour of a family of dynamical systems is the existence of homoclinic and heteroclinic bifurcations of stable and unstable manifolds of invariant objects as periodic orbits, hyperbolic, partially hyperbolic and normally hyperbolic invariant sets. If the dynamical systems are discrete, the simplest case is obtained when the invariant object is a hyperbolic saddle and there is a quadratic tangency of its invariant manifolds. If, moreover, the systems are dissipative, the presence of attractors due to the existence of such bifurcations plays a crucial role. If we consider the discrete case, the first step in the study of the behaviour of a family of diffeomorphisms near a homoclinic tangency is to obtain a limit return map. For families of two-dimensional maps one can prove that the limit return map is the logistic map and, therefore, there exist attracting periodic orbits and strange attractors. In the three dimensional case, we can find strange attractors with one or two positive Lyapunov exponents, attracting invariant curves and attracting periodic orbits. There are several possibilities of homoclinic tangencies, depending on the type of saddle fixed point we have. We have considered the case when the saddle has real eigenvalues and two of them are larger than one in absolute value. In order to get a limit return map we have to consider a two-parameter family of diffeomorphisms and a codimension two homoclinic bifurcation that we call generalized homoclinic tangency (GHT). Following the ideas used in the two dimensional case, we obtain the limit return map (which is a two-dimensional non-invertible quadratic map) and, as a simplified model, a picewise linear model of the limit return map. We will explain the similarities and limitations of the simplified model when we compare with the original limit return map.

The role of higher order connectivity statistics on neuronal network dynamics

A. Roxin

Centre de Recerca Matemàtica

Most work on sparsely connected networks of spiking neurons has made use of the assumption that there is a fixed probability of connection between any two neurons. This results in an Erdos-Renyi random graph for which the variability in the node degrees (incoming and outgoing connections) goes to zero in the large network limit compared to the mean degree. However, recent electrophysiological work indicates that local cortical circuits exhibit statistical regularities not consistent with a standard random network. I will discuss how changes in the network connectivity, specifically in the degree distributions, affect the dynamics in model networks of sparsely connected spiking neurons. More broadly I will address the question, "Does network connectivity at the microscopic scale matter for neuronal dynamics?".

From steady solutions to chaotic flows in a Rayleigh–Bénard problem at moderate Rayleigh numbers

C. Simó

Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi. Universitat de Barcelona

The dynamics of a Rayleigh–Bénard convection problem in a cubical cavity at moderate values of the Rayleigh number ($Ra \leq 10^5$) and a Prandtl number of $Pr = 0{,}71$ (with extensions to $Pr = 0{,}75$ and 0,80) was investigated. The cubical cavity was heated from below and had perfectly conducting sidewalls and uniform temperature distributions on the two horizontal walls. A system of ordinary differential equations with a dimension of typically $N \approx 11\,000$ was obtained when the conservation equations were discretized by means of a Galerkin method. Previous knowledge of the bifurcation diagram of steady solutions, reported in the literature, was used to identify the origin of several branches of periodic orbits that were continued with Ra. Half a dozen of such periodic orbits were found to be stable within narrow ranges of Ra (at most, some 5000units wide). An attracting two-torus, also restricted to a very narrow region of Ra, was also identified. It was found that the instabilization of periodic orbits quite often resulted into the development of complex dynamics such as the creation of homoclinic and heteroclinic orbits. Instances of both types of global bifurcations were analyzed in some detail.

One particular instance of chaotic dynamics (a strange attractor) was also identified. Chaotic dynamics has been found at $Pr = 0{,}71$ in a flow invariant subspace, which can be interpreted as a fixed–point subspace in terms of equivariant theory; this subspace is not attracting. However, some regions of attracting chaotic dynamics for moderate Rayleigh numbers ($9 \times 10^4 \leq Ra \leq 10^5$) were found at values of Pr slightly above 0,71. The role of a particular homoclinic solution found at $Pr = 0{,}71$ in the generation of these chaotic regions was analyzed.

This is a joint work with Dolors Puigjaner, Joan Herrero and Francesc Giralt. See Physica D 240 (2011), 920-934.

A global quantitative study of 2D dissipative diffeomorphisms with a homoclinic figure-eight

A. Vieiro

Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi. Universitat de Barcelona

We consider a 2D diffeomorphism having a homoclinic figure-eight to a dissipative saddle. We study the rich dynamics that such a system exhibits under a periodic forcing. First, we derive the full bifurcation diagram using topological techniques. In particular, there is a homoclinic zone in the parameter space which has a non- smooth boundary. We provide a complete explanation of this phenomenon relating it to double quadratic tangency curves which end up at some cubic tangency (cusp) points. We also describe the possible attractors that exist (and may coexist) in the system. A main goal of this work is to show how the previous qualitative description can be complemented with quantitative global information. To this end, we introduce a return map model which can be seen as the simplest one which is universal in some sense. We carry out numerical experiments on the model, to check that all the objects predicted to exist by the theory are found in the model, and also to investigate new properties of the system.

This is a joint work with S. Gonchenko (Univ. Nizhny Novgorod) and C. Simó (Univ. Barcelona).

TESIS

Contribution to the Dynamics of a Solar Sail in the Earth - Sun System

Ariadna Farrés

Dirigida por: Àngel Jorba
Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi. Universitat de Barcelona

Solar sails are a new concept of spacecraft propulsion that has more adepts everyday. The idea is to provide a spacecraft with a large membrane mirror such that the impact of the photons emitted by the Sun and their further re.ection produce momentum on it. For the moment there has yet not been a successful deployment of a solar sail in space, although lately there have been a couple of attempts, Cosmos 1 and NanoSail. Both missions failed before the spacecraft could get to the nominal orbit, not being able to deploy the solar sail and test the technology. In the last years, space agencies have started to invest in this technology and it seems that at some point solar sails will become a reality. Studies on the use of a solar sails have been done in the past. One of the reference books in the .eld is [McI99] where most of the studies on the subject up to 1999 are summarised. The design of solar sails, the force models for the di.erent structures, the dynamics on heliocentric or geocentric orbits are some of the subjects covered in this book. Nevertheless, dynamical system tools have had a small in.uence in this area. The use of dynamical systems tools in astrodynamics is not new for the UB-UPC Dynamical System group. Lots of studies have been made in the past applying this tools to several astrodynamical problems [GLMS01a, GLMS01b, GJMS01]. We propose to use similar ideas to navigate through the Earth -Sun system with a solar sail. One of the goals of this thesis is to study, in an extended way, the natural dynamics of a solar sail in the Earth -Sun system. This is a .rst step of a more ambitious project of designing strategies for di.erent kind of mission application such as, station keeping strategies around equilibrium points, periodic orbits and invariant tori, or consider using invariant manifold to go from one region on the phase space to the other in a natural way. Either using solar sails or other type of low -thrust spacecraft propulsion, covering most of this aspects within the framework of dynamical systems. In Chapter 1 we review some of the known aspects on solar sails and explain the model and problems that we want to face. We use the Restricted Three Body Problem (RTBP) adding the solar radiation pressure on the solar sail as a model and study some of its most Introduction relevant dynamical properties. It is well known [Sze67], that the Restricted Three Body Problem in synodical coordinates has 5 equilibrium points, which correspond to the position where the gravitational attraction of the two primaries, Earth and Sun, compensate. When we consider the extra e.ect of the solar sail, there is a 2D family of new equilibria, parameterized by the sail orientation. These arti.cially generated equilibrium points open a wide new range of possible mission applications, the Geostorm mission and the Polar Observer are two examples [McI99]. The Geostorm is a mission concept where a modest sail is placed Sunwards of the classical Earth -Sun L1 point. Then using a magnetometer to detect the solar wind polarity enables to double the time of alert of a conventional L1 Halo orbiter such as SOHO. The Polar Observer aims to use an arti.cial equilibrium point displaced above the ecliptic plane, high above one of the Earths poles. This would provide constant real-time views of the polar latitudes for studding, for instance, climate change. Most of these equilibrium points are unstable, hence a station keeping strategy is required if we want to maintain the solar sail close to equilibria for a long time. In Chapter 2 we derive a station keeping strategy using dynamics system tools. The idea is to understand the variation of the phase space when the sail orientation is changed. We can see that the linear dynamics around these equilibrium points is closely approximated by a saddle $\times$ centre $\times$ centre motion. Hence when the sail is close to the equilibrium point its trajectory will escape along the unstable direction. If we change the sail orientation, the .xed position varies slightly, and so do the stable and unstable directions. We want to .nd a new sail orientation such that the unstable direction of the new equilibrium brings the trajectory back to a vicinity of the initial position. Furthermore, one must take into account the centre projection of the motion, as this one can result of an unbounded growth. We have applied these strategies for the two missions mentioned before maintaining the solar sail around the desired equilibrium point up to 30 years. We have also tested the robustness of our strategies including errors in the position and velocity determination, as well as errors on the orientation of the sail at each manoeuvre. We will discuss the e.ect of these errors on the controllability of the solar sail. Further on, we would like to extend these ideas to derive station keeping strategies around periodic orbits. For this reason we need to have a more complete understanding of the non-linear dynamics around an equilibrium point, and how it varies when the sail orientation changes. In this thesis we have focused on the motion in a close neighbourhood of the displaced L1 equilibrium point for a solar sail, called SL1. We have developed numerical tools for the study of the bounded motion close to SL1. These techniques are very general and can be applied around other equilibrium points. Due to the instability of the region, we cannot take arbitrary initial conditions and integrate them numerically, as they would quickly escape from the vicinity of the .xed point. For this reason, we propose to perform the reduction to the centre manifold around the di.erent equilibrium points. We want to .nd a high order approximation of the motion on the centre manifold and use it to describe the motion on it. As the system is only Hamiltonian for a small set of values of the sail orientation we cannot take advantage of this as in [Jor99, JM99] where the motion around the collinear points of the RTBP is discussed. Instead, we compute the power expansion of the graph, $y = v(x)$, of the centre manifold around an equilibrium point up to high order [Sim90, Har08]. We are interested in an e.cient algorithm as we want to do the reduction to the centre manifold for di.erent sail orientations. In Chapter 3 we describe this algorithm and also give some details on the implementation of an e.cient code. We also compare the e.ciency of our algorithms with the Lie series method, for the particular case of a sail perpendicular to the Sun -line, when the system is Hamiltonian. Finally, in Chapter 4 we describe the dynamics around di.erent equilibrium points close to SL1. We have computed the families of periodic orbits by means of a continuation method. We have also used the approximation to the centre manifold obtained in the previous chapter to have a description of the periodic and quasi-periodic motion in an extended neighbourhood of these equilibrium points. Around each of the equilibrium points we .nd families of planar and vertical periodic orbits related to the two frequencies de.ning the centre motion. Families of Halo -type orbits can also be found. The interaction between the two frequencies gives rise to families of invariant tori. At the end of this dissertation we summarize the main results and point out some possible directions for future work.

Conexiones Globales y Comportamientos Periódicos en Sistemas Dinámicos Lineales a Trozos

Elisabeth García Medina

Dirigida por: Victoriano Carmona Centeno y Fernando Fernández Sánchez
Dpto. de Matemática Aplicada II, E. T. S. de Ingeniería, Universidad de Sevilla

Gran parte de la importancia que tienen los sistemas continuos lineales a trozos se debe a que modelan a la perfección numerosas aplicaciones reales (circuito de Chua, oscilador de Colpitts, oscilador en Puente de Wien). Además, la posibilidad de obtener explícitamente el flujo en cada zona de linealidad mediante la integración directa del sistema permite considerar problemas que son prácticamente inabordables en sistemas diferenciables.

En esta memoria se utilizan las particularidades de los sistemas lineales a trozos para obtener pruebas analíticas de la existencia de órbitas periódicas y conexiones globales en una amplia familia de sistemas tridimensionales lineales a trozos con continuidad. Entre todos los miembros de la familia, elegimos un representante que podemos considerar como una versión lineal a trozos del conocido sistema de Michelson.

Concretamente, se prueba la existencia de dos conexiones globales (conexión homoclina directa y ciclo heteroclino tipo punto-T) para ciertos valores del parámetro del sistema. Mediante las semiaplicaciones de Poincaré, obtenemos las condiciones que caracterizan a cada una de las conexiones y comprobamos que, a pesar de ser distintas, sus pruebas de existencia son análogas.

En relación al análisis de comportamientos periódicos estudiamos la configuración conocida como bifurcación *noose* (lazo) y llevamos a cabo una prueba analítica de la existencia de la familia de órbitas periódicas reversibles de dos cortes con el plano de separación que está involucrada en esta bifurcación. A medida que aumenta el periodo, las órbitas periódicas van deformándose hasta que se produce un cruce tangencial con el plano de separación a través del origen. En el espacio de parámetros, el punto correspondiente a este cruce tangencial tiene algunas características y propiedades que lo hacen tener un papel central en los diagramas de bifurcación de las familias de órbitas periódicas.

Mediante un algoritmo de continuación numérica, basado en el método de pseudo-longitud de arco, continuamos la familia de órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes que surge de la tangencia. Este algoritmo nos sirve también para obtener las ramas de órbitas periódicas que surgen de cada una de las degeneraciones de duplicación de periodo y pitchfork que se dan sobre el lazo. Algunas de dichas ramas tienden a conexiones globales a medida que aumenta el periodo. Además, todas estas familias pasan por tangencias de distinto tipo entre las órbitas periódicas y el plano de separación. Este fenómeno nos obliga a desarrollar y manipular distintas ecuaciones para órbitas periódicas reversibles y no reversibles de diferente número de cortes con el plano de separación.

A lo largo de la memoria se pone de manifiesto que la versión lineal a trozos del sistema de Michelson reproduce, con las debidas puntualizaciones, mucha de la dinámica que exhibe el sistema original de Michelson. De esta forma, se abre la posibilidad de encontrar nuevos fenómenos en el caso diferenciable a partir del estudio del sistema no regular. Aunque estas demostraciones son específicas de esta familia, los procedimientos utilizados se pueden extender de forma genérica a otros sistemas lineales a trozos.

Local Monomialisation of generalized analytic functions

Rafael Martín Villaverde

Dirigida por: Jean-Philippe Rolin y Fernando Sanz Sánchez
Université de la Bourgogne, Universidad de Valladolid

Las series de potencias generalizadas generalizan las series de potencias usuales permitiendo que los exponentes formen un conjunto bien ordenado de números reales, no solamente los naturales. Las funciones analíticas generalizadas están definidas localmente como simas de series de potencias generalizadas convergentes. En este trabajo probamos un resultado de monomialización local para tales funciones: pueden transformarse en funciones que se expresan localmente como un monomio producto por una unidad mediante un proceso finito de explosiones locales. Para dar un enunciado preciso de este resultado, se introduce y se desarrolla en el trabajo una noción correcta de variedad analítica generalizada y de explosión en dichas variedades.

Study of the structure of chaotic eigenfunctions in a scar functions basis set

Fabio Revuelta Peña

Dirigida por: Rosa María Benito Zafrilla, Eduardo Germán Vergini
Universidad Politécnica de Madrid

The central problem studied in this dissertation is the correspondence between classical and quantum mechanics in classically chaotic Hamiltonian systems in the field of 'quantum chaos' More specifically, we propose a new and efficient method to compute the eigenfunctions of chaotic systems using a set of scar functions. These scar functions play a central role in the study of the quantum manifestations of classical chaos, since they are semiclassical wave functions with a very low dispersion and localized over the invariant manifolds of the periodic orbits that constitute the organizing structure of classical chaos. The method that we have developed has been called "Gram-Schmidt Selective Method" (GSSM), as it constructs the basis set using the conventional Gram-Schmidt Method but taking also into account the dispersion of the scar functions and the length of the periodic orbits along which they are localized. Using the GSSM, we have been able to compute with high accuracy the 2400 lowest-lying eigenfunctions of a highly chaotic quartic oscillator with two coupled degrees of freedom as well as some very excited eigenfunctions of the same system in a small energy window; in both cases, our basis sets were more efficient than those previously reported in the literature. Furthermore, we have applied the GSSM to calculate the eigenfunctions of the isomerizing molecular system LiNC/LiCN, which has a 'mixed' phase space that presents both regular and irregular motion; in this system, we have accurately computed the 66 lowest-lying eigenfunctions.

Finally, we have proposed a perturbative scheme to compute reaction rates in open systems described by anharmonic potentials. With this method, we have obtained the reaction rate of different potentials with one and two degrees of freedom, as well as the isomerizing rate of the molecular system LiNC/LiCN in the presence of (uncorrelated) white noise and enbedded in a (correlated) bath of argon atoms. The developed method is independent of the dividing surface and it has enabled us to compute analytical corrections to the famous Kramers formula, allowing at the same time the exact calculation of reaction rates in anharmonic potentials that interact with the enviroment.

Improving the numbers. A new generation of ODE solvers and Computer Assisted Proofs

Marcos Rodríguez

Dirigida por: Roberto Barrio Gil
IUMA y Centro Universitario de la Defensa Academia General Militar

En el estudio de sistemas dinámicos, modelizaciones poblacionales, simulaciones de reacciones y un sinfín de áreas de la ciencia, la formulación última del problema se realiza en términos de ecuaciones diferenciales de naturaleza muy diversa. Podemos encontrarnos con modelos descritos a través de una ecuación diferencial de orden superior, sistemas dinámicos representados por el Hamiltoniano, o incluso por medio de la función potencial, como puede ser el caso del problema del satélite artificial, sin olvidar la clásica formulación como un sistema de ecuaciones diferenciales. Una vez formulado, tanto físicos, químicos como ingenieros e incluso matemáticos, tienen que resolver la ecuación diferencial, atendiendo cada uno a sus necesidades particulares. Aparecen parámetros en las ecuaciones. Unos necesitan unos pocos dígitos de precisión, pues están limitados a la tosquedad de sus instrumentos de medida. Otros quieren mucha precisión, para estudiar propiedades del sistema que no serían perceptibles de otro modo. Un ejemplo concreto de esta necesidad lo podemos encontrar en los trabajos de Divakar Viswanath quien fue capaz de encontrar condiciones iniciales de órbitas periódicas foliadas en el atractor caótico de Lorenz, con más de 500 dígitos de precisión. Para hacerlo tuvo que servirse de ingeniosos argumentos analíticos evitando así una integración en alta precisión que no podía realizar. También, para estudiar la naturaleza fractal del atractor de Lorenz, Viswanath tuvo que realizar estudios analíticos en alta precisión combinándolos con los datos de las órbitas periodicas obtenidas anteriormente. Por otra parte, algunos investigadores quieren saber si la solución depende fuertemente de las condiciones iniciales, otros si depende de los parámetros elegidos. El ejemplo más representativo de esta motivación es el estudio de los exponentes de Lyapunov, como mecanismo de detección de caos de un sistema. Como último ejemplo, en la ingeniería es común el tratar de resolver ecuaciones diferenciales cuyos parámetros o condiciones iniciales están sujetos a incertidumbre, bien por la propia medición, bien por querer conocer el comportamiento del sistema en un rango de valores de los mismos. Para ello, la solución clásica consistía en realizar una simulación estadística de tipo Monte Carlo. Otra solución, más elegante, basada en los trabajos de Martin Berz, consiste en propagar junto con la solución, todas las dependencias respecto de las condiciones iniciales y parámetros y, en el punto final, reconstruir la forma propagada por medio de un polinomio de Taylor multivariado. Así pueden enumerarse diversos requisitos de la comunidad científica. Sin embargo, todos ellos están de acuerdo en una cosa. No quieren perder el tiempo resolviendo la ecuación, y piensan: ¿Y es que eso no puede hacerlo otro? En la actualidad existen numerosos programas capaces de integrar ecuaciones diferenciales, basados en distintos métodos, programados en diversos lenguajes, capaces de realizar diferentes simulaciones, y ligados a gran variedad de licencias, libres y comerciales. No cuesta demasiado darse cuenta de la triste relación existente entre versatilidad, facilidad y funcionalidad de un programa y su tipo de licencia. Ciertamente es fácil entender a los desarrolladores de software, ya que, cuanto más es capaz de hacer un programa, más esfuerzo subyace en él, y menor es el número de programadores dispuestos a regalar el fruto de su trabajo. Ésta fue la motivación de la temática del primer bloque de la presente tesis doctoral. Sin pensar siquiera en el tipo de licencia, en la actualidad, existen muchos programas capaces de resolver ecuaciones diferenciales, respondiendo a algún requisito de los antes mencionados, pero nunca a todos. Todos estos requisitos, posibles para pocos integradores, imposibles para muchos, se juntan en un solo programa dando lugar a un software libre y gratuito capaz de lo posimposible1: TIDES. La gran mayoría de los integradores numéricos se basan en la idea de aproximar el valor de la solución de una ecuación diferencial por una astuta combinación lineal de evaluaciones de la función. La ventaja que esto conlleva es que, para su utilización, un usuario apenas tiene que alimentar el programa con la función que representa su campo vectorial (escrita con una sintaxis natural), sus condiciones iniciales, y los tiempos iniciales y finales de la integración. Sin embargo, los métodos de este tipo quedan lastrados por la rigidez de la representación del campo vectorial y lo que suponía facilidad de uso impide poder 1Vocablo ficticio. Lugar donde lo posible y lo imposible se encuentran 1 calcular dependencias de la solución respecto a las condiciones iniciales y, en el caso de Runge-Kutta y métodos multipaso, ir a precisiones elevadas, ya que el orden del método no puede ser cambiado. Para desarrollar TIDESno podíamos utilizar ninguno de los métodos mencionados, ya que imposibilitarían algunas características que queríamos incluir. Nuestra elección fue el método de Taylor, basado en la fórmula de Taylor en una variable. Para poder utilizar este método, hay que alimentarlo con la función del campo vectorial, así como de sus derivadas hasta el orden deseado. Para poder realizar esto de una manera numéricamente eficiente, es necesario un tratamiento simbólico previo de la función del campo vectorial, lo que supondría un trabajo tedioso que debería realizar cada usuario para resolver su problema. Este primer problema lo resolvimos proveyendo a TIDESde un preprocesador simbólico, escrito en Mathematica, que realiza el trabajo sucio en lugar del usuario. Además, el preprocesador no sólo descompone la función para su tratamiento, sino que con dos sencillas instrucciones crea todo el código C o FORTRAN necesario, listo para compilar. El siguiente paso consistió en modificar el método de Taylor para que pudiera calcular también las dependencias de la solución respecto a las condiciones iniciales, así como implementar los motores de integración en doble precisión y en precisión extendida. El software TIDESes el buque insignia de esta tesis doctoral. Ha sido elaborado, probado y revisado minuciosamente para poder resolver todas las necesidades mencionadas de una manera extremadamente sencilla, pero eficiente y competitivo con otros programas existentes . Además, es distribuido de manera libre y gratuita. La primera parte de la tesis se centra en la descripción básica del método, la extensión a dependencia paramétrica y un profundo estudio de los errores de redondeo del mismo. El segundo bloque de la tesis se ha dedicado a las demostraciones asistidas por ordenador. La motivación de este bloque viene del estudio de los sistemas dinámicos donde, dada la naturaleza no lineal de la mayoría de ellos, abundan las simulaciones numéricas que dan gran información del sistema pero que carecen del rigor tan apreciado por los matemáticos. Son muchos los investigadores que han seguido estas líneas de investigación. En las últimas décadas, la comunidad científica ha empezado a usar los ordenadores para aportar el rigor de un teorema a sus simulaciones. Como casos particulares podemos señalar los trabajos de Galias y Zgliczýnski quienes probaron la existencia de órbitas periódicas particulares, Zgliczýnski, Kapela y Wilczak, quienes probaron bifurcaciones. Zgliczýnski en solitario introdujo los conceptos topológicos para probar la existencia de caos. Y finalmente podríamos remarcar la demostración de la existencia de un atractor caótico hecha por Tucker. Nuestro trabajo se va a enfocar en la demostración de existencia de órbitas periódicas, pero de una manera masiva. Partimos de una colección grande de condiciones iniciales de órbitas periódicas (más de 75000) de dos sistemas dinámicos Hamiltonianos, calculadas por procedimientos numéricos. Nuestro objetivo es pues validar las órbitas y demostrar su estabilidad por medio de las técnicas de demostraciones asistidas por ordenador. En un primer trabajo se han validado los puntos de manera discreta, teniendo familias rigurosas pero discontinuas de órbitas, con un 97también se ha demostrado la estabilidad lineal de las órbitas. En la segunda actuación, se han seleccionado familias aisladas para intentar, y conseguir, demostrarlas de manera continua usando los mismos argumentos de las demostraciones asistidas, pero de una forma más exigente. De esta forma se han conseguido resultados más sólidos, pero no tan extensos como en el estudio discreto. 2

List of participants

- Antonio Algaba Duran, Huelva (España)
- Lluís Alsedà i Soler, Universitat Autònoma de Barcelona (España)
- Roberto Barrio Gil, Universidad de Zaragoza (España)
- Fernando Blesa Moreno, Universidad de Zaragoza (España)
- Juan Campos Rodriguez, Universidad de Granada (España)
- Beatriz Campos Sancho, Universitat Jaume I (España)
- Marta Canadell Cano, Universitat de Barcelona (España)
- Jordi Canela Sánchez, Universitat de Barcelona (España)
- Victoriano Carmona Centeno, Universidad de Sevilla (España)
- Fernando Casas , Universitat Jaume I (España)
- Cristina Chiralt Monleón, Universitat Jaume I (España)
- Alicia Cordero Barbero, Universidad Politécnica de Valencia (España)
- Núria Fagella, Universitat de Barcelona (España)
- Ariadna Farrés Basiana, Universite de la Borgogne (Francia)
- Soledad Fernández García, Universidad de Sevilla (España)
- Enric Fossas Colet, Universitat Politècnica de Catalunya (España)
- Cristobal Garcia Garcia, Huelva (España)
- Elisabeth García Medina, Universidad de Sevilla (España)
- Johanna Denise Garcia Saldaña, Universitat Autònoma de Barcelona (España)
- Toni Garijo Real, Universitat Rovira i Virgili (España)
- Armengol Gasull Embid, Universitat Autònoma de Barcelona (España)

- Albert Granados Corsellas, Universität Stuttgart (Alemania)
- Toni Guillamon Grabolosa, Universitat Politècnica de Catalunya (-)
- Alex Haro Provinciale, Universitat de Barcelona (España)
- Xavier Jarque, Universitat de Barcelona (Catalunya)
- Mike Jeffrey, University of Bristol (Inglaterra)
- Angel Jorba, Universidad de Barcelona (España)
- Tere M-Seara, Universitat Politècnica de Catalunya (España)
- David Martí Pete, Universitat de Barcelona (España)
- Narcís Miguel i Baños, Universitat de Barcelona (Catalunya)
- Josep Maria Mondelo González, Universitat Autònoma de Barcelona (Spain)
- Sylvia Novo, Universidad de Valladolid (España)
- Carmen Núñez Jiménez, Universidad de Valladolid (España)
- Rafael Obaya Garcia, Universidad de Valladolid (España)
- Alfred Peris, Universitat Politècnica de València (España)
- Enrique Ponce Núñez, Universidad de Sevilla (España)
- Antonio Pumariño Vazquez, Universidad de Oviedo (España)
- Fabio Revuelta Peña, Universidad Politécnica de Madrid (España)
- José Angel Rodríguez Méndez, Universidad de Oviedo (España)
- Marcos Rodriguez Rodriguez, Centro Universitario de la Defensa (España)
- Alex Roxin, Centre de Recerca Matemàtica (España)
- Fernando Sanz Sánchez, Universidad de Valladolid (España)
- Sergio Serrano Pastor, Universidad de Zaragoza (España)
- Carles Simó Torres, Universitat de Barcelona (Catalunya)
- Joan Carles Tatjer Montaña, Universitat de Barcelona (España)
- Antonio E. Teruel Aguilar, Universitat Illes Balears (España)
- Joan Torregrosa, Universitat Autònoma de Barcelona (España)

- Juan R. Torregrosa Sánchez, Universidad Politécnica de Valencia (España)
- Francisco Torres Peral, Universidad de Sevilla (España)
- Elisabet Vela Felardo, Universidad de Sevilla (España)
- Arturo Vieiro Yanes, Universitat de Barcelona (España)
- Pura Vindel , Universitat Jaume I (España)