



## **Ddays 2014**

Badajoz, 12-14 de noviembre de 2014

# Índice

|   |    |
|---|----|
| Comités   | 2  |
| Programa  | 3  |
| Sesión 1. Centro foco e integrabilidad              | 4  |
| Sesión 2. Cuando la teoría encontró al ordenador    | 7  |
| Sesión 3. Insight, not just numbers                 | 10 |
| Sesión 4. Dinámica discreta en modelos de población | 13 |
| Sesiones de tesis                                   | 15 |

# COMITÉS

## 1. COORDINADORES

- Lluís Alsedà (Universitat Autònoma de Barcelona)
- Enrique Ponce (Universidad de Sevilla)

## 2. COMITÉ CIENTÍFICO

- Roberto Barrio (Universidad de Zaragoza)
- José Luis Bravo (Universidad de Extremadura )
- Toni Guillamon (Universitat Politècnica de Catalunya)
- Pura Vindel (Universitat Jaume I)

## 3. COMITÉ ORGANIZADOR LOCAL

- Amelia Álvarez (Universidad de Extremadura)
- María Jesús Álvarez (Universitat de les Illes Balears)
- José Luis Bravo (Universidad de Extremadura)
- Manuel Fernández (Universidad de Extremadura)
- Rafel Prohens (Universitat de les Illes Balears)
- Antonio Teruel (Universitat de les Illes Balears)
- Catalina Vich (Universitat de les Illes Balears)

# Programa

| Miércoles   |                  | Jueves      |                      | Viernes     |               |
|-------------|------------------|-------------|----------------------|-------------|---------------|
|             |                  | 9:00-9:45   | Alex Haro            | 9:00-9:45   | Daniel Franco |
|             |                  | 9:45-10:30  | Jordi-Lluís Figueras | 9:45-10:30  | Marcos Marvá  |
|             |                  | 10:30-11:00 | Café                 | 10:30-11:00 | Café          |
|             |                  | 11:00-11:45 | Alejandro Luque      | 11:00-11:45 | Alfonso Ruiz  |
|             |                  | 11:45-12:20 | Roberto Barrio       | 11:45-12:15 | Clausura      |
|             |                  | 12:20-12:55 | Jorge Galán          |             |               |
|             |                  | 13:00-14:00 | Asamblea Dance       |             |               |
|             |                  | 14:00-16:00 | Comida               |             |               |
| 16:00-16:30 | Apertura         | 16:00-16:35 | Rafael Ramírez-Ros   |             |               |
| 16:30-17:15 | Cristóbal García | 16:35-17:10 | Jesús Palacián       |             |               |
| 17:15-18:00 | Joan Torregrosa  | 17:10-18:00 | Sesiones de Tesis    |             |               |
| 18:00-18:30 | Café             | 18:00-18:30 | Café                 |             |               |
| 18:30-19:15 | Isaac García     | 18:30-19:20 | Sesiones de Tesis    |             |               |
|             |                  | 21:00       | Cena Social          |             |               |

# Sesión 1

## Centro foco e integrabilidad

### El problema de centro. Una visión desde la forma normal

Cristóbal García

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Experimentales, Universidad de Huelva

En una primera parte de la charla repasaremos el problema de centro, citando algunos de los resultados, sobre formas normales, que permiten la caracterización teórica del problema para algunos casos particulares: no degenerado y nilpotente. Mediante ejemplos estudiaremos algunas de las características del problema para campos vectoriales planos degenerados. En una segunda parte, caracterizaremos parcialmente dos problemas que están directamente relacionados con el problema objeto de estudio: la integrabilidad analítica, y la orbital reversibilidad de un campo vectorial plano.

### The center-focus problem in piecewise systems

Joan Torregrosa

Departament de Matemàtica, Universitat Autònoma de Barcelona

We study the center-focus problem as well as the number of limit cycles which bifurcate from a weak focus for some families of planar polynomial discontinuous ordinary differential equations. We consider only the case when the systems present two zones and they are separated by a straight line. The same mechanism that provides the return map is also used for the study of the number of limit cycles bifurcating from a center after a polynomial piecewise perturbation using higher order perturbations in a small parameter. In particular we will show that the maximum number of limit cycles that can appear up to a seventh order piecewise linear perturbation of the linear center is three.

## El problema del centro en dimensión 3

Isaac A. García

Departament de Matemàtica, Universitat de Lleida, Avda. Jaume II, 69, 25001 Lleida, España

Estudiaremos desde diversas perspectivas el *problema del centro* no degenerado sobre una variedad central  $W^c$  bidimensional en campos vectoriales  $\mathcal{X}$  en  $\mathbb{R}^3$  localmente analíticos en un entorno  $U \subset \mathbb{R}^3$  de una singularidad tipo Hopf, es decir con valores propios asociados  $\{\lambda, \pm i\omega\}$  donde  $\lambda, \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Se pretende pues averiguar cuando todas las órbitas de  $\mathcal{X}$  sobre  $U \cap W^c$  cercanas a la singularidad son periódicas o bien espiralan alrededor de ella.

Nuestra aproximación será diferente de la clásica en el sentido de que no se calcularán constantes de Poincaré–Liapunov del campo plano reducido  $\mathcal{X}|_{W^c}$ . En su lugar caracterizaremos los centros utilizando propiedades del llamado *inverso de multiplicador de Jacobi*: funciones  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1(U)$  tales que el campo reescalado  $\mathcal{X}/V$  es de divergencia nula, ver por ejemplo [2]. A parte de la existencia, unicidad y regularidad de  $V$  el punto clave será establecer bajo qué condiciones se tiene que el conjunto invariante  $V^{-1}(0)$  satisface  $W^c \subset V^{-1}(0)$ . Ilustraremos los resultados resolviendo el problema del centro en la familia de Lü.

Se estudiará también el número máximo de ciclos límite que pueden bifurcar de la singularidad Hopf en el caso silla-foco bajo perturbaciones de  $\mathcal{X}$  analíticas que mantengan la naturaleza de la singularidad. Se analizará la bifurcación múltiple de Hopf mediante una reducción de Liapunov-Schmidt de la aplicación de Poincaré y la ciclicidad del foco se determinará en términos de la multiplicidad de anulación en la silla-foco de cualquier  $C^\infty$  y no plano inverso de multiplicador de Jacobi.

Bajo otra perspectiva también se estudiará el problema del centro usando generadores infinitesimales  $\mathcal{Z}$  de *simetrías de Lie* de  $\mathcal{X}$ . Caracterizamos los centros a través de la estructura de los conjuntos  $C(\mathcal{X}, U)$  y  $N(\mathcal{X}, U)$  de *centralizadores* (campos conmutadores) y *normalizadores*  $\mathcal{Z}$  de  $\mathcal{X}$  que son analíticos en  $U$ . Los resultados obtenidos son de utilidad para detectar propiedades de algunos centros como son la linearización (o la orbital linearización) analítica.

Finalizaremos con una incursión sobre el estudio de la existencia de un entorno  $U^* \subset U$  de una singularidad cero-Hopf (caso en el que  $\lambda = 0$  pero  $\omega \neq 0$ ) completamente foliada por órbitas periódicas (incluyendo una curva de singularidades). Llamamos a este tipo de singularidades *centros tridimensionales* y los caracterizamos mediante una aplicación de Poincaré analítica. Obtendremos una analogía completa con el caso clásico de un centro plano no degenerado analítico: (i) la anulación de los primeros términos en el desarrollo de Taylor de la aplicación desplazamiento nos proporcionará condiciones necesarias de centro tridimensional en el espacio de parámetros de la familia  $\mathcal{X}$  mientras que la suficiencia se obtendrá mediante simetrías o métodos de integrabilidad; (ii) los centros tridimensionales se caracterizan por ser completamente analíticamente integrables y, en consecuencia, tienen una forma normal analíticamente orbitalmente linearizable; (iii) cuando  $\mathcal{X}$  es polinomial y parametrizado por sus coeficientes, los centros tridimensionales corresponden a variedades afines en el espacio de parámetros.

## Referencias

- [1] A. Buică, I. A. García, and S. Maza, *Existence of inverse Jacobi multipliers around Hopf points in  $\mathbb{R}^3$ : emphasis on the center problem*, J. Differential Equations **252** (2012) 6324–6336.
- [2] A. Buică, I.A. García and S. Maza, *Inverse Jacobi multipliers: recent applications in dynamical systems*, Progress and Challenges in Dynamical Systems, Springer Proc. Math. Stat. **54** (2013) 127–141.
- [3] I.A. García, S. Maza and D.S. Shafer, *Properties of monodromic points on center manifolds in  $\mathbb{R}^3$  via Lie symmetries*, J. Dyn. Differ. Equ. **25** (2013), 981–1000.
- [4] A. Buică, I.A. García and S. Maza, *Multiple Hopf bifurcation in  $\mathbb{R}^3$  and inverse Jacobi multipliers*, J. Differential Equations **256** (2014), 310–325.
- [5] A. Buică, I.A. García and S. Maza, *Some remarks on inverse Jacobi multipliers around Hopf singularities*, J. Math. Anal. Appl. **418** (2014), 1074–1083.
- [6] I.A. García, *Integrable zero-Hopf singularities and 3-dimensional centers*. To appear.
- [7] I.A. García and C. Valls, *The three-dimensional center problem for the zero-Hopf singularity*. To appear.

# Sesión 2

## Cuando la teoría encontró al ordenador

El comportamiento a largo plazo en un sistema dinámico está organizado por las variedades invariantes. Hay varios teoremas clásicos que afirman que estas variedades invariantes persisten bajo pequeñas perturbaciones del sistema, incluidos la teoría de variedades normalmente hiperbólicas y en la teoría KAM. Un problema que presentan tales resultados es que, en aplicaciones prácticas, las estimaciones de persistencia de estos objetos invariantes suelen ser muy pesimistas, e incluso los teoremas son difícilmente aplicables.

Recientemente se han desarrollado varios métodos constructivos para demostrar la existencia de objetos invariantes, bajo el paraguas del llamado método de la parametrización, introducido por Rafael de la Llave y en el que han colaborado muchos investigadores. Una revisión parcial de tales métodos es llevada a cabo en [1]. La metodología permite demostrar teoremas de existencia de objetos invariantes que permiten validar rigurosamente (generalmente usando ordenadores) resultados numéricos. Aunque la validación de los resultados numéricos (esto es, la verificación de las hipótesis de los teoremas) es independiente de los métodos numéricos que se han usado para obtenerlos, la metodología permite desarrollar algoritmos de cálculo muy eficientes. Es más, permiten considerar casos en los que los objetos invariantes están a punto de romperse, esto es, en el régimen (altamente) no perturbativo.

Así, pues, el método de parametrización persigue el objetivo de cubrir el programa

“teorema-algoritmo-aplicación-validación”,

en el estudio de existencia de variedades invariantes, en cada uno de los contextos en el que se aplica. En esta sesión consideramos toros invariantes, focalizándonos en aquéllos que contienen dinámica cuasiperiódica. Veremos que el uso del ordenador juega un papel importante, no sólo para verificar las hipótesis involucradas, sino también para entender algunas sutilezas de los teoremas y plantear nuevas preguntas. Por este motivo, queremos describir un pequeño encuentro entre los teoremas presentados y un ordenador de mesa cualquiera.

### 1. El encuentro: el método de parametrización

Alex Haro (Universitat de Barcelona)

En esta charla describiremos una metodología general, un meta-algoritmo que permite tratar el problema de existencia de toros invariantes en varios contextos. En particular, consideraremos tres contextos: sistemas cuasiperiódicos, toros KAM y toros normalmente hiperbólicos. (Ver [1]).

Aplicaremos los algoritmos derivados a varios ejemplos. El programa anterior se completará en los dos primeros contextos en las conferencias siguientes, pormenorizando los teoremas de validación y validando algunos de los resultados numéricos presentados en esta conferencia.

La intención es mostrar la potencia del método de parametrización, y advertir que queda mucho trabajo por hacer.



## 2. Primera cita: Toros normalmente hiperbólicos en sistemas cuasi-periódicos

Jordi Lluís Figueras (Uppsala University)

En esta charla explicaremos cómo validar toros normalmente hiperbólicos en sistemas cuasiperiódicos. Más concretamente, expondremos la teoría, los algoritmos y las implementaciones que permiten realizar las validaciones, cubriendo el programa “teoría-algoritmo-aplicación-validación” en este contexto [2, 3, 4, 5].

En la segunda parte de la charla describiremos la aplicación de estas técnicas a tres problemas: 1) acotación de la medida del espectro de operadores de Schrödinger cuasiperiódicos; 2) validación de toros normalmente hiperbólicos al borde de la rotura en la standard map cuasiperiódica; y 3) desenmascaramiento de un falso atractor no caótico extraño.

## 3. Segunda cita: Toros KAM en sistemas hamiltonianos

Alejandro Luque (Universitat de Barcelona)

El estudio de soluciones cuasiperiódicas tiene un gran interés en Sistemas Dinámicos, especialmente en problemas de mecánica Hamiltoniana. La teoría KAM ofrece una gran colección de técnicas y métodos con el fin de establecer condiciones suficientes para la existencia de tales soluciones. Sin embargo, aplicar resultados tipo KAM a problemas concretos conlleva diversas dificultades, especialmente si hablamos de resultados clásicos, que usan transformaciones canónicas. Puede que por este motivo no resulte raro encontrar trabajos en la literatura donde la aplicación de teoremas tipo KAM sea heurística o imprecisa.

En esta charla utilizaremos el método de la parametrización (introducido en [1] y revisado recientemente [2]) para obtener soluciones cuasiperiódicas en problemas concretos. Presentaremos una forma eficiente de caracterizar rigurosamente dichas soluciones para valores concretos de los parámetros del problema, evitando así hipótesis del tipo “si la perturbación es arbitrariamente pequeña”. Una parte de la contrucción se realizará de forma asistida por ordenador. Ilustraremos la metodología considerando el clásico ejemplo de la aplicación estándar de Chirikov. Demostraremos existencia de curvas invariantes hasta valores muy cercanos a su desaparición por rotura.

## Referencias

- [1] Haro, A., Canadell, M., Figueras, J-Ll., Luque, A., Mondelo, J-M. *The parameterization method for invariant manifolds: from rigorous results to effective computations*. In preparation.
- [2] Haro, A., de la Llave, R. *A parameterization method for the computation of invariant tori and their whiskers in quasi-periodic maps: rigorous results*. J. Differential Equations 228 (2006), pp. 530–579.
- [3] Haro, A., de la Llave, R. *A parameterization method for the computation of invariant tori and their whiskers in quasi-periodic maps: numerical algorithms*. Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B 6 (2006) pp. 1261–1300.
- [4] Haro, A., de la Llave, R. *A parameterization method for the computation of invariant tori and their whiskers in quasi-periodic maps: explorations and mechanisms for the breakdown of hyperbolicity*. SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 6 (2007) pp. 142–207.
- [5] Figueras, J-Ll., Haro, A. *Reliable computation of robust response tori on the verge of breakdown*. SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 11 (2012), pp. 597-628.

- [6] de la Llave, R., González, A., Jorba, À., Villanueva, J. *KAM Theory without Action-Angle Variables*. *Nonlinearity* 18 (2005) pp. 855-895.

# Sesión 3

## Insight, not just numbers

### Experimental Mathematics in Dynamical Systems

Roberto Barrio

Computational Dynamics group (CoDy),  
Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Zaragoza  
Email: rbarrio@unizar.es, Webpage: cody.unizar.es

In this talk we introduce the use of several computational techniques in the study of different problems. We briefly detail how the mixed use of techniques like chaos detection techniques, continuation techniques, computer-assisted proofs, very high-precision numerics and specially designed methods permits to locate and study the origin of some interesting phenomena in Dynamics, as the global organization in neuron models [1], the global homoclinic structure of Lorenz-like systems [5], the coexistence of chaos-hyperchaos behavior [2], the existence of safe regions in open Hamiltonian systems [3], the existence of symmetric homoclinic orbits near a reversible equilibrium [4] and so on.

In collaboration with V. Gelfreich, J. T. Lázaro, M.A. Martínez, J.R. Pacha, M. Rodríguez, S. Serrano, A. Shilnikov, T. Xing.

### Referencias

- [1] R. Barrio, M.A. Martínez, S. Serrano, A. Shilnikov, *Macro-and micro-chaotic structures in the Hindmarsh-Rose model of bursting neurons*, *Chaos*, **24**(2) (2014), 023128.
- [2] R. Barrio, M.A. Martínez, S. Serrano, D. Wilczak, *When chaos meets hyperchaos*, preprint (2014).
- [3] R. Barrio, M. Rodríguez, *Systematic Computer Assisted Proofs of periodic orbits of Hamiltonian systems*, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **19**(8) (2014), 2660-2675.
- [4] J. T. Lázaro, R. Barrio, V. Gelfreich, J.R. Pacha, *Stokes phenomenon near a reversible equilibrium and existence of symmetric homoclinic orbit*, preprint (2014).
- [5] T. Xing, R. Barrio, A. Shilnikov, *Symbolic quest into homoclinic chaos*, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, in press (2014).

# Técnicas de continuación numérica en sistemas dinámicos

Jorge Galán Vioque

Grupo de Sistemas Dinámicos en Ingeniería  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Universidad de Sevilla

Presentaremos las herramientas numéricas que utilizamos en el grupo de investigación prestando especial atención a las técnicas de continuación numérica [1]. Trataremos de exponer nuestra experiencia y las ventajas y desventajas de emplear un código propio frente a otro elaborado por otros como es el caso de AUTO [2]. En particular, abordaremos ejemplos de continuación de órbitas periódicas en sistemas que provienen de la mecánica (cuántica y clásica) que presentan cantidades conservadas y/o simetrías [3].

## Referencias

- [1] B. Krauskop, H. Osinga, and J. Galán-Vioque. *Numerical Continuation Methods for Dynamical Systems: Path following and boundary value problems*. Springer Verlag, Berlin, 2007.
- [2] E. J. Doedel, B. Oldemann, A. R. Champneys, T. F. Fairgrieve, Y. A. Kuznetsov, B. Sandstede, and X. J. Wang. AUTO-07P: Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations. Available via <http://sourceforge.net/projects/auto-07p/>
- [3] F.J. Muñoz-Almaraz, E. Freire, J. Galán, E.J. Doedel and A. Vanderbauwhede. Continuation of periodic orbits in conservative and Hamiltonian systems. *Physica D*, **181**:1–38, 2003.

## Dos fenómenos singulares: experimentos, conjeturas y teoremas

Rafael Ramírez-Ros

Departamento de Matemática Aplicada 1, UPC, Barcelona

Presentaremos dos fenómenos singulares en el contexto de las aplicaciones analíticas preservando área. El término singular significa que ciertas cantidades son exponencialmente pequeñas respecto a un parámetro asociado de forma natural a cada problema.

El primer fenómeno es la escisión de las separatrices de un punto fijo débilmente hiperbólico en una familia de aplicaciones analíticas cercanas a la identidad. Concretamente, consideraremos aplicaciones obtenidas al perturbar la aplicación de McMillan, que es integrable. El parámetro singular es el exponente característico del punto fijo.

El segundo fenómeno es el comportamiento asintótico de las longitudes de ciertos polígonos inscritos en una curva plana cerrada analítica estrictamente convexa. A saber, los polígonos recorridos por una partícula puntual que se mueve en línea recta dentro de, pero

cerca de, la curva convexa y que rebota al chocar con ella según la ley “ángulo de incidencia igual a ángulo de reflexión”. El parámetro singular es el número de lados de los polígonos o, equivalentemente, el periodo de las correspondientes trayectorias del billar.

Describiremos algunos experimentos numéricos que sugieren el carácter singular de ambos fenómenos, para lo cual es necesario usar una aritmética de múltiple precisión e implementar los algoritmos de la forma más eficiente posible. A continuación, propondremos varias conjeturas a la luz de los resultados obtenidos. Finalmente, enunciaremos algunos teoremas que contienen respuestas parciales a las cuestiones planteadas.

Estos resultados han sido obtenidos en diversos trabajos por Amadeu Delshams, Pau Martín, Rafael Ramírez-Ros, David Sauzin, Tere Seara y Anna Tamarit (en orden alfabético).

## Periodic Solutions of Resonant Hamiltonian Systems Through Singular Reduction

Jesús F. Palacián

Departamento de Ingeniería Matemática e Informática, Universidad Pública de Navarra

The problem we discuss in this presentation has been a testing ground of many different methods for analysing Hamiltonian systems and in particular finding periodic solutions and their stability. Here we illustrate the use of the method of singular reduction on this classic problem. Singular reduction reduces the dimension of the problem studied and our test problem is a two degrees of freedom Hamiltonian system in  $\mathbf{R}^4$  which will be studied by a Hamiltonian system of one degree of freedom on a two dimensional real algebraic surface called an orbifold. The two dimensionality lends itself to a graphical representation with a better geometric insight on the flow of the system. The planar restricted three body problem is considered as a benchmark of this problem for the last 85 years, and in particular there has been a bunch of works, mainly of numerical type, to obtain the periodic solutions and related invariant manifolds around the equilibria points  $L_4$  and  $L_5$ . We shall illustrate how reduction theory is used to establish rigorously the existence and stability of these solutions, as well as the different types of bifurcations. We shall also mention how our theoretical approach can be combine with normal forms in order to obtain good initial conditions to approximate the periodic solutions and their associated manifolds. Then we shall jump to  $n$  degrees of freedom, and in particular to three degrees of freedom case where the polynomial invariants needed in the singular reduction theory are computed using an algorithm based on integer programming. After computing these invariants we use the theory Gröbner bases and the division algorithm for multivariate polynomials to deal with the equations of motion in terms of the invariants. We shall apply the theory with the aim of finding some periodic solutions in resonant Hamiltonian systems of three degrees of freedom with semisimple linear part.

This is a joint work with Ken R. Meyer (University of Cincinnati) and Patricia Yanguas (Universidad Pública de Navarra).

# Sesión 4

## Dinámica discreta en modelos de población

### Estabilización de fluctuaciones en dinámica de poblaciones

Daniel Franco Leis

Departamento de Matemática Aplicada, UNED, Madrid

Comprender y controlar las fluctuaciones en el tamaño de la población de ciertas especies ha sido y es un problema central en ecología. En los años setenta, Robert May propuso que esas fluctuaciones podrían ser intrínsecas a la especie, basándose en que muchos modelos de población (dados por una ecuación en diferencias unidimensional) pueden generar dinámicas caóticas. Durante la charla, describiremos algunas de las estrategias que se han propuesto para *controlar el caos* en dinámica de poblaciones. Estas estrategias tienen sentido desde el punto de vista biológico y buscan reducir el rango de las fluctuaciones o, en el mejor de los casos, estabilizar un punto de equilibrio. En esta situación, estudiaremos bajo qué condiciones la estabilización o la reducción del rango de las fluctuaciones es global.

### Two time scales difference equation systems and population models

Marcos Marv

Department of Physics and Mathematics, University of Alcal, Spain

Many phenomena can be described as the combination of different processes, each of them related to different organization levels and, thus, evolving accordingly to its own time scale (e.g., in population dynamics, individual level versus population level). Modeling these phenomena gives rise to time scale systems, which combine fast and slow processes into a single equations system. These systems are difficult to handle since consist of a large number of coupled variables and equations. Under appropriate conditions, approximate aggregation techniques take advantage of the existence of different time scales and allow to build up

a less dimensional, aggregated, system. The aggregated system describes some long term behavior features of the two time scales system, which is done by translating the effect of the faster dynamics into the slower one.

Within this framework, we deal with a spatially distributed Leslie-Gower competition model with fast individuals dispersal. We have found two interesting results. On the one hand, there is a trade-off mechanisms between fast dispersal and competition. In particular, in case of weak competition, there are dispersal regimes allowing the weaker competitor to survive, and even to outcompete the stronger competitor when, in absence of dispersal, the weaker competitor would be ruled out. On the other hand, when the environment is heterogeneous we have found that under strong asymmetric dispersal, whether competitive coexistence or competitive exclusion occurs depends on the initial population sizes of the two species. This outcome is not allowed by the non spatially distributed Leslie-Gower competition model.

## **Análisis de los efectos de dispersión en dinámica de poblaciones: Conectar o no conectar regiones aisladas**

Alfonso Ruiz-Herrera

Bolyai Institute University of Szeged (Hungary)

En la literatura ecológica existen numerosos experimentos, aparentemente contradictorios, que estudian el impacto de la dispersión en especies espacialmente estructuradas en su viabilidad. En este escenario, el objetivo de esta charla será contribuir a la explicación de dicha controversia. Para ello, no perdiendo de vista los experimentos, discutiremos analíticamente criterios de atracción global, sincronización, persistencia, la evolución en corta/larga escala temporal de la población total en modelos simples. Uno de los fenómenos curiosos que encontramos es que podemos aumentar la viabilidad de una especie conectando a su hábitat una región en la que es imposible sobrevivir. Por otro lado, es posible mejorar el rendimiento tanto económico como biológico de una especie sujeta a cualquier tipo de explotación creando regiones protegidas donde la explotación está prohibida. Trabajo conjunto con P. Carmona y D. Franco

## **Referencias**

- [1] A. Ruiz-Herrera, *Analysis of dispersal effects in metapopulation models*, submitted.
- [2] D. Franco, A. Ruiz-Herrera, *To connect or not to connect isolated patches*, submitted.
- [3] P. Carmona, D. Franco, A. Ruiz-Herrera, *The impact of dispersal on two patch heterogeneous metapopulations*, submitted.

# Sesiones de tesis

## Homoclinic phenomena in conservative systems

Marina Gonchenko

Technische Universität Berlin, Germany

The goal of the thesis is the study of homoclinic orbits in conservative systems (area-preserving maps and Hamiltonian systems). We consider homoclinic (bi-asymptotic) orbits either to saddle periodic orbits or to whiskered tori. Such type orbits, called homoclinic by Poincaré, are of great interest in the theory of dynamical systems since their presence implies complicated dynamics. The thesis is divided in two parts according to two quite different topics considered. In the first part, we study area-preserving maps (APMs) with a nontransversal homoclinic orbit (homoclinic tangency) to a saddle fixed point and we prove the existence of cascades of elliptic periodic points near the given homoclinic trajectory. We also study the phenomenon of the coexistence of infinitely many single-round periodic orbits of different large periods (called global resonance). We consider the related problems in different types of APMs (symplectic maps and non-orientable APMs) with quadratic or cubic tangencies. The second part of the thesis is dedicated to the study of exponentially small splitting of separatrices arising from a perturbation of a Hamiltonian system with a homoclinic connection (separatrix). We use the classical Poincaré-Melnikov approach to measure the splitting, although in the case of exponential smallness we have to ensure that the first order approximation overcome the error term. We consider Hamiltonian systems possessing two-dimensional whiskered tori with quadratic frequencies and three-dimensional whiskered tori with cubic golden frequencies. In the two-dimensional case, we find 23 new quadratic numbers for which the Poincaré-Melnikov method can be applied and establish the existence of 4 transverse homoclinic orbits. We also study the continuation of the homoclinic orbits for all values of the parameter of perturbation in the case of the silver ratio  $\sqrt{2}-1$ . For the three-dimensional whiskered torus with frequency vector given by the so-called “cubic golden number”, we establish the existence of exponentially small splitting of separatrices and detect the transversality of 8 homoclinic orbits.

## Medidas fuertemente mezclantes y subconjuntos invariantes en dinámica lineal

Marina Murillo Arcila

IUMPA, Universitat Politècnica de València, [mamuar1@posgrado.upv.es](mailto:mamuar1@posgrado.upv.es)



Esta charla titulada “Medidas fuertemente mezclantes y subconjuntos invariantes en dinámica lineal” se estructura en tres partes. En primer lugar, demostramos que el Criterio de Hiperciclicidad Frecuente para operadores y para  $C_0$ -semigrupos asegura la existencia de medidas invariantes fuertemente mezclantes con soporte total. Además proporcionaremos diversos ejemplos de operadores y semigrupos que ilustran estos resultados.

En la segunda parte de la charla, centramos nuestra atención en uno de los  $C_0$ -semigrupos más importantes, el semigrupo traslación. Inspirados en el trabajo de Bayart y Ruzsa [9] que caracteriza la hiperciclicidad frecuente de los operadores backward shifts con pesos, caracterizamos los semigrupos traslación frecuentemente hipercíclicos en los espacios  $C_0^p(\mathbb{R})$  y  $L_p^p(\mathbb{R})$ .

En la última parte, estudiamos propiedades que satisfacen los sistemas dinámicos lineales autónomos y no autónomos sobre ciertos subconjuntos invariantes. En particular, prestamos especial atención al caso de operadores positivos y semigrupos positivos definidos en retículos, cuando los restringimos al cono positivo.

## Referencias

- [1] S. Bartoll, F. Martínez-Giménez, M. Murillo-Arcila and A. Peris, *Cantor Sets, Bernoulli Shifts and Linear Dynamics*. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, **80** (2014), 195–207
- [2] S. Bartoll, F. Martínez-Giménez, M. Murillo-Arcila and A. Peris, *Cantor Sets, Bernoulli Shifts and Linear Dynamics*. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, **80** (2014), 195–207
- [3] A. Conejero, M. Murillo and J.B. Seoane-Sepúlveda, *Linear Chaos for the Quick- Thinking- Driver model*. Preprint.
- [4] M. Murillo-Arcila and A. Peris, *Mixing properties for nonautonomous linear dynamics and invariant sets*. Appl. Math. Lett., **26** (2013), 215–218
- [5] M. Murillo-Arcila and A. Peris, *Strong mixing measures for linear operators and frequent hypercyclicity*. J. Math. Anal. Appl., **298** (2013), 462–465
- [6] M. Murillo-Arcila and A. Peris, *Strong mixing measures for  $C_0$ -semigroups*. DOI:10.1007/s13398-014-0169-3. To appear in RACSAM
- [7] M. Murillo-Arcila and A. Peris. *Chaotic behavior on invariant sets of linear operators*. To appear in Integral Equations and Operator Theory
- [8] E. Mangino and M. Murillo-Arcila. *Frequently hypercyclic translation  $C_0$ -semigroups*. Submitted. arXiv:1407.4637
- [9] F. Bayart and I. Z. Ruzsa, *Difference sets and frequently hypercyclic weighted shifts*. To appear in Ergodic Theory and Dynamical Systems

# A dynamical theory for monotone neutral functional differential equations with application to compartmental systems

Víctor Muñoz Villarragut

Universidad de Valladolid

One of the main questions in the theory of non-autonomous differential equations is the description of the long-term behavior of their trajectories. When the functions defining such equations present a recurrent variation in time, their solutions naturally define a skew-product semiflow. In this work, the structure of omega-limit sets is studied, which allows a global view of the dynamics of the equation.

Functional differential equations with delay take into account not only the present state of the system, but also some of its past states. They have some remarkable applications in epidemiology, population dynamics, and control engineering. Neutral functional differential equations with delay consider the derivative of the value of an operator rather than the derivative of the solution. Thus, models using them can represent spontaneous increments and decrements of the solution. The study of the dynamical properties of a skew-product semiflow has been often tackled by assuming some monotonicity conditions on the semiflow. These conditions are a helpful tool when it comes to deducing the long-term behavior of the solutions.

In this work, we study non-autonomous neutral functional differential equations with non-autonomous linear operator and infinite delay. In this situation, the main conclusions in the previous literature do not remain valid, and the extension of the theory requires the use of an alternative definition of exponential order. We assume some recurrence properties on the temporal variation of the equation; thus, its solutions induce a skew-product semiflow with a minimal flow on the base,  $\Omega$ . In particular, the almost periodic and almost automorphic cases are included in this formulation. We invert the non-autonomous convolution operator associated to the equation. Besides, new transformed order relations, associated to both the standard order and the exponential order, are considered; since the operator is non-autonomous, this partial order is not defined on  $BU$ , the space of bounded and uniformly continuous functions, but on each fiber of the product  $\Omega \times BU$  instead. The use of the transformed exponential order makes it possible to impose monotonicity conditions which do not require the differentiability of the coefficients defining the operator, but only their continuity. This makes the transformed exponential order more natural than the direct exponential order when the operator is non-autonomous.

Some of the many models consisting of neutral functional differential equations with delay are compartmental models. They are formed by several compartments linked by means of pipes; the compartments contain some material which flows between them through the pipes, which takes a non-negligible time. In turn, the compartments create and destroy material, which is represented by the neutral part of the equation. The foregoing theoretical results are applied to compartmental systems, yielding conclusions under more general conditions than those presented in the previous literature and improving this way some previous results on dynamical systems which are monotone for the exponential order even in their autonomous versions. Specifically, we describe the eventual amount of material within the compartments in terms of the geometry defined by the pipes.