Libro de resúmenes

Ddays 2023

Oviedo 3-6 de octubre de 2023

Índice

1. Dinámica topológica y combinatoria

1.1. Dinámica de una familia continua de aplicaciones lineales a trozos (A. Gasull)

Resumen

En esta charla se explicaran resultados de un trabajo en curso que persigue describir la dinámica global de la siguiente familia dos paramétrica de aplicaciones continuas del plano en el plano: $F(x, y) = (|x|-y+a, x-|y|+b)$. Como veremos, a pesar de su aparente sencillez, ya que es lineal en cada uno de los cuadrantes, su dinámica puede llegar a ser complicada. De hecho, demostraremos que mientras que para ciertos valores de (a,b) la dinámica es simple (hay puntos fijos, o órbitas periódicas superatractoras globales), para otros valores es mucho más complicada (llegando a haber infinidad de puntos periódicos con distintos periodos, o incluso entropía positiva, en un sentido que se definirá en la charla).

Según sabemos, hasta el momento, los trabajos previos sobre este tipo de aplicaciones solo habían detectado los casos de dinámica simple. Los resultados presentados forman parte de un trabajo en preparación de título “Dynamics of a family of piecewise continuous maps” y autores A. Cima, A. G., V. Mañosa y Francesc Mañosas.

1.2. Reconstructing Dynamical Systems (P. J. Chocano)

Resumen

In this talk we introduce basic notions and results from the theory of finite topological spaces. Later, we discuss the classical concept of dynamical systems in this framework with several examples and define dynamical systems using multivalued maps. Then, we see how to approximate some dynamical aspects of discrete dynamical systems defined on polyhedra using sequences of finite topological spaces and multivalued maps. Concretely, we analyse fixed points. To conclude, we give some results about reconstructing other dynamical properties and future work.

1.3. Atractores: una perspectiva topológica (H. Barge)

Resumen

Sea K un espacio métrico compacto. Es natural preguntarse bajo qué condiciones existe un sistema dinámico (continuo o discreto) definido en una variedad que realice a K como atractor. Este problema fue resuelto en el caso continuo por Günther y Segal en 1993 y por Kato en el caso discreto en 1998. La realizabilidad de K como atractor depende solamente de su topología y del carácter continuo o discreto del sistema, pues podemos escoger tanto el espacio ambiente como el embebimiento. Teniendo esto en cuenta, es posible enunciar la siguiente variante del problema: sea M una variedad y $K \subset M$ un compacto ¿existe un sistema dinámico (continuo o discreto) que tenga a K como atractor? Esta cuestión es más fina que la anterior pues, además de tener en cuenta la topología del compacto, es imprescindible tener control el embebimiento de dicho compacto en el espacio ambiente.

En esta charla recordaremos los resultados clásicos relativos al problema de realización y nos centraremos en el problema en $\mathbb{R}^3$ para compactos *toroidales*, esto es, compactos que admiten bases de entornos formadas por toros sólidos. Algunos ejemplos de este tipo de compactos son el círculo, el solenoide o el continuo de Whitehead. En particular, se presenta una solución completa del problema de realización para conjuntos toroidales anudados. Estos resultados han sido obtenidos en colaboración con J.J. Sánchez-Gabites.

1.4. Dinámica Simple en Sistemas de Kolmogorov No-monótonos del Plano (A. Ruiz-Herrera)

Resumen

Los sistemas dinámicos discretos de la forma

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n f(ax_n + by_n) \\ y_{n+1} = y_n g(cx_n + dy_n) \end{cases} \tag{1}$$

con $a, b, c, d > 0$ y $f, g : [0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$ funciones continuas son un marco usual para describir el comportamiento de dos especies que interactuan en un mismo ecosistema. De manera informal, el modelo (1) puede verse como una generalización a dinámica discreta del modelo de Lotka-Volterra

$$\begin{cases} x' = x(1 - (ax + by)) \\ y' = y(1 - (cx + dy)). \end{cases} \tag{2}$$

En esta charla vamos a probar que los resultados floclóricos basados en la posición relativa de las nuclinas para (2) son también válidos para el modelo discreto (1). El método de prueba consiste en dividir el plano en regiones adecuadas y aplicar la teoría de arcos de traslación de manera sutil. Una característica importante de nuestros resultados es que no imponemos que f y g sean monótonas. Este hecho nos va a permitir extender varios resultados clásicos de la teoría de flujos monótonos a sistemas no-monótonos. Trabajo conjunto con Lei Niu (University of Helsinki)

Bibliografía

[1] Niu, L., Ruiz-Herrera, A. Simple dynamics in non-monotone Kolmogorov systems. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics, 153 (2023), 369-384.

2. Dinámica de operadores

2.1. Shadowing versus finite shadowing in linear dynamics (N. C. Bernardes)

Resumen

The shadowing property is one of the most important concepts in the modern theory of dynamical systems and differential equations. It originated with works by Anosov, Bowen and Sinai from the late 1960s and early 1970s, leading to the famous shadowing lemma in differentiable dynamics, which asserts that a diffeomorphism has the shadowing property in a neighborhood of its hyperbolic set.

Given a discrete dynamical system (X, T) consisting of a metric space X and a map $T : X \to X$, recall that a $\delta-$pseudotrajectory of T, where $\delta > 0$, is a finite or infinite sequence $(x_j)_{i<j<k}$ in X, where $-\infty \leq i < k \leq \infty$ and $k - i \geq 3$, satisfying

$$d(Tx_j, x_{j+1}) \leq \delta \text{ for all } i < j < k - 1 .$$

Recall also that T is said to have the finite shadowing property (resp. the positive shadowing property) if for every $\varepsilon > 0$, there exists $\delta > 0$ such that every finite $\delta-$pseudotrajectory $(x_j)_{j=0}^{k}$ (resp. every $\delta-$pseudotrajectory $(x_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$) of T is $\varepsilon-$shadowed by the trajectory of some $x \in X$, in the sense that

$$d(x_j, T^j x) < \varepsilon \text{ for all } j \in \{0, \dots, k\} \text{ (resp. for all } j \in \mathbb{N}_0) .$$

If T is bijective, then the shadowing property is defined by replacing the set $\mathbb{N}_0$ by the set $\mathbb{Z}$ in the definition of positive shadowing.

In a certain sense, in a system with the shadowing property, computer-generated trajectories are close to real trajectories. From this computational point of view, the notion of finite shadowing seems to be even more relevant than shadowing, since computer-generated trajectories are actually finite pseudotrajectories.

It is well known that shadowing and finite shadowing coincide in the case of continuous maps on compact metric spaces, but this equivalence already fails on a certain locally compact subspace of the real line $\mathbb{R}$.

Our goal is to investigate the possible equivalence between shadowing and finite shadowing in the setting of linear dynamics. Our main result asserts that the concepts of shadowing, positive shadowing and finite shadowing always coincide for invertible operators on Banach spaces. On the other hand, we exhibit examples showing that these three concepts may differ from one another in the case of the Frechet space $H(\mathbb{C})$ of all entire functions.

Joint work with Alfredo Peris. The author is beneficiary of a grant within the framework of the grants for the retraining, modality María Zambrano, in the Spanish university system (Spanish Ministry of Universities, financed by the European Union, NextGenerationEU).

2.2. Propiedades de superciclicidad de los autovalores extendidos del operador diferenciación en el espacio de funciones enteras. (M. González)

Resumen

Sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Un operador (lineal y continuo) L actuando en el espacio $H(\mathbb{C})$ de las funciones enteras es un λ-*autovalor extendido* del operador diferenciación D si verifica $DL = \lambda LD$.

En esta charla se caracterizarán los operadores que son λ-autovalores extendidos de D que son supercíclicos, o admiten un subespacio (cerrado de dimensión infinita) de vectores hipercíclicos o supercíclicos.

Trabajo conjunto con Fernando León-Saavedra y María Pilar Romero de la Rosa (Universidad de Cádiz).

2.3. Iterates of a map with dense orbit defined on a Hausdorff topological space (F. Leon)

Resumen

Let f be a continuous map defined on a Hausdorff topological space X without isolated points. We say that f is hypercyclic if there exists $x \in X$ such that $\{f_n(x)\}_{n\geq 0}$ is dense in X. For arbitrary topological spaces if f is hypercyclic then in general f^2 (also f^n) does not. When f is hypercyclic but f^2 does not, P. S. Bourdon [1] proved that the space X is decomposed into two subsets relative to which the dynamic of f is easy to describe. What will happen if f is hypercyclic but f^n is not? Will space X be decomposed into n parts? These are some questions posed by P. S. Bourdon in [1]. In this lecture we will review the results in [2] where we answer Bourdon's problem by discovering the existence of a divisor $k(f)$ of n which is intrinsic to f, in such a way the space X is decomposed intro $k(f)$ subsets relative to which the dynamic of f is easy to describe.

Bibliografía

[1] P.S. Bourdon. The second iterate of a map with dense orbit. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **124** (5), 1577-1581 (1996).

[2] K. Grosse-Erdmann, F. León-Saavedra, A. Piqueras-Lerena. The iterates of a map with dense orbit. *Acta Scientiarum Mathematicarum*, **74**, 245–257 (2008).

[3] M. Marano, H. Salas. Maps with dense orbits: Ansari's theorem revisited and the infinite torus. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society*, **16**, 481–492 (2009).

2.4. El problema de la recurrencia de $T \oplus T$ (A. López-Martínez)

Resumen

Sea X un F-espacio separable de dimensión infinita. Dado un operador lineal continuo $T : X \longrightarrow X$ con alguna *"propiedad"* dinámica (hiperciclicidad, caos, etc.), es natural preguntarse si el operador suma directa

$$T \oplus T : X \oplus X \longrightarrow X \oplus X,$$

que actúa como $T \oplus T(x_1, x_2) := (Tx_1, Tx_2)$ en el espacio suma directa $X \oplus X$, presenta nuevamente esa *"propiedad"*. Esta pregunta será denominada el *problema de la "propiedad" de* $T \oplus T$. En esta charla/presentación nos centraremos en el *problema de la recurrencia de* $T \oplus T$, que fue planteado en 2014 como una pregunta abierta en [4]. En particular, motivaremos el problema examinando la versión hipercíclica del problema (ver [2,3,5]); y luego resolveremos el problema de la recurrencia de $T \oplus T$ en sentido negativo en todo espacio de Banach separable de dimensión infinita mediante una modificación de la construcción expuesta en [1].

Esta charla se basa en un trabajo conjunto con Sophie Grivaux y Alfred Peris [6]. Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el proyecto FRONT de la Agencia Nacional de Investigación de Francia (subvención ANR-17-CE40-0021), por el Labex CEMPI (ANR-11-LABX-0007-01), por el Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades de España (subvención FPU2019/04094), por MCIN/AEI/10.13039/501100011033, Proyecto PID2019-105011GB-I00, y por la Generalitat Valenciana, Proyecto PROMETEU/2021/070.

Bibliografía

[1] J.M. Augé. Linear Operators with Wild Dynamics. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **140** (6) (2012), 2103–2116.

[2] F. Bayart and É. Matheron. Hypercyclic operators failing the Hypercyclicity Criterion on classical Banach spaces. *J. Funct. Anal.*, **250** (2) (2007), 426–441.

[3] F. Bayart and É. Matheron. (Non-)Weakly mixing operators and hypercyclicity sets. *Ann. de l'Institut Fourier*, **59** (1) (2009), 1–35.

[4] G. Costakis, A. Manoussos, and I. Parissis. Recurrent linear operators. *Complex Anal. Oper. Theory*, **8** (2014), 1601–1643.

[5] M. De La Rosa and C. Read. A hypercyclic operator whose direct sum $T \oplus T$ is not hypercyclic. *J. Oper. Theory*, **61** (2009), 369–380.

[6] S. Grivaux, A. López-Martínez, and A. Peris. Questions in linear recurrence: From the $T \oplus T$-problem to lineability. Preprint (2022), arXiv.2212.03652.

3. Dinámica caótica: naturaleza y génesis

3.1. Chaos in nature and nature of chaos (R. Barrio)

Resumen

We study the chaotic structure in some mathematical models of excitable cells: neurons and cardiac muscle cells. Bursting, following a fast–slow dynamics, is the most characteristic behavior of these dynamical systems, and the number of spikes may change due to spike-adding phenomenon. Using analytical and numerical methods we give, by focusing on the paradigmatic 3D Hindmarsh–Rose neuron model, a review of recent results on the global organization of the parameter space of neuron models with bursting regions occurring between saddle-node and homoclinic bifurcations (fold/hom bursting). The global structure permits us to provide a conjecture on the limit structure of the chaotic attractors of fold/hom bursters. Besides, we apply these results in two realistic frameworks: insect movement gait changes and the appearance of Early Afterdepolarizations in cardiac dynamics.

Bibliografía

[1] S. Serrano, M. Á. Martínez, R. Barrio. Order in chaos: Structure of chaotic invariant sets of square-wave neuron models. *Chaos*, 31, 043108 (2021)

[2] R. Barrio, S. Ibáñez, L. Pérez. Homoclinic organization in the Hindmarsh–Rose model: A three parameter study featured. *Chaos*, 30, 053132 (2020)

[3] S. Serrano, Á. Lozano, R. Barrio, A. Mayora-Cebollero, R. Vigara. Coupling loves bursting... and tripod gait. *Preprint.* (2023)

[4] R. Barrio, J. A. Jover-Galtier, Á. Martínez, L. Pérez, S. Serrano. Mathematical Birth of Early Afterdepolarizations in a Cardiomyocyte Model. *Preprint* (2023)

3.2. Biología y caos: ejemplos y rutas (T. Lázaro)

Resumen

El caos, ya sea observado o simulado, es un fenómeno obicuo en la naturaleza. Muchos son los modelos que intentan comprenderlo y analizarlo, tanto en sistemas aparentemente simples (como la aplicación logística de Robert May) como en algunos más complejos que aparecen en cadenas tróficas, dinámica cardíaca, de poblaciones, etc. Su complejidad y, a la vez, su simplicidad, no dejan de cautivar a la comunidad científica.

En esta charla intentaremos, modestamente, mostrar algunos de dichos ejemplos en modelos biológicos, haciendo énfasis en la ruta que los ha llevado a dicho comportamiento caótico

3.3. Valor y... ¡al Caos! (F. Fernández)

Resumen

(Antes de que nadie se cuestione el título de la charla, debo comentar que es una referencia directa a "Valor y... ¡al Toro!", una de las primeras aventuras de "Mortadelo y Filemón" y que, de este modo, pretendo hacer un humilde homenaje póstumo al genial historietista Francisco Ibáñez, que tan importante ha sido y será siempre para muchos de mi generación.)

Empezaré diciendo que los que hemos trabajado alguna vez en el estudio de singularidades y degeneraciones de equilibrios en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, sabemos bien del enorme peso específico que la dinámica global tiene en el estudio de muchos de estos objetos locales. De hecho, no hay que irse más allá del plano para contemplar como la degeneración de Bogdanov-Takens necesita de órbitas homoclinas para poder caracterizar completamente su despliegue.

Más aún, cuando trabajamos en tres dimensiones o más, es bien conocido que el retorno inducido por la existencia de algunas conexiones globales (bajo ciertas condiciones de expansión y contracción en el entorno de uno de sus equilibrios), implica la existencia de dinámica caótica debido a la aparición de infinidad de órbitas periódicas y herraduras de Smale. El caso de la homoclina de tipo Shilnikov es el ejemplo más clásico en esta línea.

De estos dos párrafos anteriores se desprende que, aunque solamente queramos analizar la existencia de objetos simples cerca de singularidades locales o globales, es muy probable que acabemos teniendo que movernos en regiones donde la dinámica es muy compleja o, incluso, conviviendo junto al caos. He de ahí el título de la charla, en la que intentaré recrear, con diversos ejemplos y estudios teóricos, la complejidad dinámica antes mencionada, extraer comportamientos simples que coexistan con ella y, finalmente, usar alguno de estos objetos para dar la vuelta a la tortilla y explicar, a partir de ellos, algunos escenarios complejos de bifurcación.

3.4. Singularidades y atractores extraños (J.A. Rodríguez)

Resumen

Atractores extraños no hiperbólicos fueron detectados numéricamente muy temprano [1, 2]. Sin embargo, la primera prueba analítica de la persistencia de estos atractores fue dada más tarde en [3] para la familia de Hénon $H_{a,b}(x, y) = (1 - ax^2 + y, bx)$. La prueba parte de la persistencia de atractores extraños probada previamente en [4] para la familia cuadrática $f_a(x) = 1 - ax^2$, que es la familia límite (cuando $b \to 0$) de $H_{a,b}$. En [5] se probó su abundancia en bifurcaciones homoclínicas genéricas para familias de difeomorfismos definidos sobre una superficie. La ruptura de órbitas de Shil´nikov produce una infinidad de estas bifurcaciones homoclínicas, que pueden ser controladas en familias no genéricas de campos lineales a trozos, para conseguir simultáneamente la coexistencia de infinitos atractores extraños persistentes [6, 7]. Las tangencias homoclínicas y, en particular, las orbitas de Shil´nikov no son configuraciones cuya existencia se concluya facilmente. En familias de campos, por ejemplo, los elementos más simples de determinar y estudiar analíticamente son sus singularidades. Por consiguiente, buscar singularidades de codimensión mínima desde la que se desplieguen genéricamente atractores extraños es un criterio muy útil de existencia de atractores extraños. Con este propósito órbitas de Shil´nikov fueron primero desplegadas genéricamente desde una singularidad nilpotente de codimensión cuatro [8], luego desde una singularidad nilpotente de codimensión tres [9, 10] y posteriormente [11, 12] desde una singularidad Hopf-cero, de codimensión dos. Aplicando los resultados obtenidos para los despliegues de singularidades nilpotentes se probó en [13] como el acoplamiento lineal de dos campos planos conduce al caos en dimensión cuatro. Se trata, en definitiva, de un camino para comprender la génesis de complejidad dinámica en el acoplamiento de un mayor número de sistemas: acoplamiento de neuronas, etc.

Todos los atractores extraños mencionados más arriba son atractores unidimensionales. Hace años que nuestro grupo de trabajo intenta desarrollar el mismo programa para atractores extraños bidimensionales (dos exponentes de Lyapunov positivos), partiendo del trabajo de Tatjer [14], donde se estudian las diferentes tangencias homoclínicas para una familia F_μ de difeomorfismos definidos en $\mathbb{R}^3$. En el entorno de una de estas tangencias (tangencia de Tatjer en lo sucesivo), usando técnicas de renormalización como en [5], se define en [14] una familia de difeomorfismos G_μ cuya familia límite es la familia cuadrática $T_{a,b}(x, y) = (a + y^2, x + by)$. Para esta familia se han obtenido numéricamente en [15, 16] posibles atractores extraños bidimensionales. La prueba analítica de la persistencia de tales atractores se presenta como una tarea muy larga. Para su desarrollo se planteó el siguiente programa:

1. Persistencia de atractores extraños en el despliegue de una tangencia de Tatjer

a) Buscar y estudiar familias $\Gamma_{a,\theta}$ de aplicaciones lineales a trozos con $a > 1$ (las expanding baker maps EBM) cuyas dinámicas iluminen las posibles dinámicas de $T_{a,b}$, del mismo modo que el estudio de las aplicaciones tienda fué de gran ayuda para el estudio de la dinámica de la familia cuadrática $f_a(x) = 1 - ax^2$. Para $\theta = 3\pi/4$, en $[17 - 21]$ se obtienen los primeros resultados de existencia de recintos estrictamente invariantes, de atractores

extraños y de los métodos de renormalización que permiten comprender la cascada de duplicación de atractores extraños. Parte de estos resultados se extienden en [22, 23] para la familia biparamétrica $\Gamma_{a,\theta}$.

b) Trasladar a $T_{a,b}$ las ideas desarrolladas a la hora de encontrar los recintos estrictamente invariantes de $\Gamma_{a,\theta}$. Luego, probar la transitividad y expansividad de la dinámica en el interior de estos recintos. Un serio problema a la hora de probar la expansividad surge de la anulación del jacobiano de $T_{a,b}$ sobre la recta crítica $y = 0$. Como en [3] una laboriosa exclusión de parámetros parece necesaria.

c) Probar la persistencia de atractores extraños bidimensionales para G_μ a partir del levantamiento de la dinámica de su aplicación límite $T_{a,b}$.

2. Buscar singularidades de baja codimensión desde la que se desplieguen genéricamente tangencias de Tatjer

El propósito de esta charla es explicar el estado de este programa: los puntos donde se esperan resultados futuros y aquellos donde el objetivo sea quizás inalcanzable.

Bibliografía

[1] E. N. Lorenz. Deterministic non periodic flow. J. Atmos. Sci., 20: 130-141, 1963.

[2] M. Hénon. A two-dimensional mapping with a strange attractor. Comm. Mathe. Phys., 50: 69-77, 1976.

[3] M. Benedicks and L. Carleson. On iterations of $1 - ax^2$ on $(-1, 1)$. Annals Math., 122: 1-25, 1985.

[4] M. Benedicks and L. Carleson. The dynamics of the Hénon maps. Annals Math., 133: 73-169, 1991.

[5] L. Mora and M. Viana. Abundance of strange attractors. Acta Math., 171: 1-71, 1993.

[6] A. Pumariño and J. A. Rodríguez. Coexistence and persistence of strange attractors. Lecture Notes in Mathematics, 1658. Springer, 1997.

[7] A. Pumariño and J. A. Rodríguez. Coexistence and persistence of infinitely many strange attractors. Ergodic Theory Dynam. Systems, 21(5);1511–1523, 2001.

[8] S. Ibáñez and J. A. Rodríguez. Sil'nikov bifurcations in generic 4-unfoldings of a codimension-4 singularity. J. Differential Equations 120(2):411–428, 1995.

[9] S. Ibáñez and J. A. Rodríguez. Shil'nikov configurations in any generic unfolding of the nilpotent singularity of codimension three on $\mathbb{R}^3$. J. Differential Equations 208(1):147–175, 2005.

[10] P. G. Barrientos, S. Ibáñez and J. A. Rodríguez. Heteroclinic cycles arising in generic unfoldings of nilpotent singularities. J. Dynam Differ Equ. 23(4): 999–1028, 2011.

[11] F. Dumortier. S. Ibáñez, H. Kokubu and C. Simó. About the unfolding of a Hopf-zero singularity. Discrete Contin. Dyn. Syst., 33(10): 4435–4471, 2013.

[12] I. Baldomá, S. Ibáñez, T. M. Seara, Hopf-Zero singularities truly unfold chaos, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation Volume 84,105162, 2020

[13] F. Drubi, S. Ibáñez and J. A. Rodríguez. Coupling leads to chaos. J. Differential Equations, 239(2): 371–385, 2007.

[14] J. C. Tatjer. Three-dimensional dissipative diffeomorphismswith homoclinic tangencies. Erg Th. & Dyn. Sys., 21: 249-302, 2001.

[15] A. Pumariño and J. C. Tatjer. Dynamics near homoclinic bifurcations of three-dimensional dissipative diffeomorhisms. Nonlinearity, 19: 2833-2852, 2006.

[16] A. Pumariño and J. C. Tatjer. Attractors for return maps near homoclinic tangencies of three-dimensional dissipative diffeomorphisms. Discrete Cont. Dyn. Sys. - Series B, 8(4): 971-1005, 2007.

[17] A. Pumariño, J. A. Rodríguez, J. C. Tatjer and E. Vigil.,Expanding Baker maps as models for the dynamics emerging from 3-D homoclinic bifurcations. Discrete Cont. Dyn. Sys. - Series B, 14(2):523-541, 2014.

[18] A. Pumariño, J. A. Rodríguez, J. C. Tatjer and E. Vigil. Chaotic dynamics for two-dimensional tent maps. Nonlinearity, 28(2): 407-434, 2015.

[19] A. Pumariño, J. A. Rodríguez and E. Vigil. Expanding Baker Maps: Coexistence of strange attractors. Discrete Cont. Dyn. Sys. - Series A, 37:523-550, 2017.

[20] A. Pumariño, J. A. Rodríguez and E. Vigil. Renormalization of two-dimensional piecewise linear maps: Abundance of 2-D strange attractors. Discrete Cont. Dyn. Sys. - Series A, 38(2): 941-966, 2018.

[21] A. Pumariño, J. A. Rodríguez and E. Vigil. Persistent two-dimensional strange attractors for a two-parameter family of expanding baker maps.Discrete Cont. Dyn. Sys. - Series B, 24(2): 657-670, 2019.

[22] A. Marqués-Lobeiras, A. Pumariño, J. A. Rodríguez and E. Vigil. Strictly invariant sets for 2-D tent maps: 2-D strange attractors Bull. Braz. Math. Soc. New Ser. 54 10, 2023

[23] A. Marqués-Lobeiras, A. Pumariño, J. A. Rodríguez and E. Vigil. Splitting and coexistence of 2-D strange attractors in a general family of Expanding Baker Maps. Nonlinearity 36 (8) 2023.

4. Fenómenos no lineales en física atómica y molecular

4.1. Creación de super rotores moleculares: Un ejemplo de fenómeno no lineal en física atómica y molecular (J. P. Salas)

Resumen

Desde el punto de vista de la Mecánica Clásica, los sistemas atómicos y moleculares perturbados son en general sistemas dinámicos no lineales con pocos grados de libertad. En muchas ocasiones, los objetos invariantes como las órbitas periódicas actúan como estructuras organizadoras de los autoestados cuánticos. Por ejemplo, la identificación de dichos objetos es necesaria para la asignación espectral de niveles altamente excitados. En otras palabras, los sistemas atómicos y moleculares, y más en particular cuando están sometidos a campos externos, son sistemas perfectos para seguir las pistas de la estructura clásica del espacio de fase en el espectro cuántico. En otros casos, el análisis de las trayectorias fásicas (órbitas) permite derivar las condiciones bajo las cuales ocurren, por ejemplo, la formación de moléculas diatómicas, la doble o múltiple ionización de átomos o la formación de super rotores moleculares.

Vamos a tratar en esta charla este último caso: la formación de super rotores moleculares. Para ello, consideramos una molécula diatómica sometida a un pulso láser linealmente polarizado cuyo eje de polarización gira con una aceleración constante. Bajo esta configuración, conocida como centrifugadora óptica, experimentalmente se observa que el momento angular de la molécula adquiere valores muy grandes (estados de superrotor) que, en muchas ocasiones, llevan a la molécula a disociarse. Vamos a ilustrar como, mediante modelos Hamiltonianos reducidos clásicos, es posible revelar el papel que los diversos parámetros del campo láser juegan en las diferentes fases de creación de los estados super rotor.

4.2. Order-chaos transitions in correlation diagrams and quantization of period orbits (F. Borondo)

Resumen

Eigenlevel correlation diagrams has been proved to be a very useful tool to understand eigenstate characteristics of classically chaotic systems. We illustrate the theory using the vibrational eigenstates of the LiCN molecular system. In particular, we showed in a previous publication (F.J. Arranz, F. Borondo and R.M. Benito, Phys. Rev. Lett. 80, 944 (1998) how to unveil the formation of the scarring mechanism, a cornerstone in the theory of quantum chaos, using the Planck constant as the correlation parameter. By increasing $\hbar$ we induced a transition from order to chaos in which scarred functions appeared as interaction of states in broad avoided crossings, at points which formed a well-defined line. In this talk, we demonstrate that this frontier can be obtained by semiclassical quantization of the involved scarring periodic orbits. Additionally, in order to calculate the Maslov index of each quantized scarring periodic orbit, we introduce a novel straightforward method based on Lagrangian descriptors.

4.3. Efectos nolineales en gases cuánticos ultrafríos (F. Revuelta)

Resumen

La sintetización del primer condesado de Bose-Einstein en el año 1995 [1,2], reconocida con el Premio Nobel de Física en el año 2001, impulsó considerablemente el estudio de los gases cuánticos ultrafríos. Estos sistemas forman una plataforma bien establecida para información [3] y computación [4] cuánticas, en buena medida debido al elevado control que se puede tener de ellos. Así, la interacción en los átomos del gas se puede variar de forma arbitraria, haciendo que pase de ser fuertemente atractiva a altamente repulsiva, o viceversa, por medio de las resonancias de Feshbach [5]. Además, el número de partículas que forma el gas se puede controlar de forma arbitraria [6]. También se puede manipular la posición de los átomos, confinándolos en trampas ópticas de distinta forma y dimensión [7,8].

En esta charla explicaremos qué efectos tienen la presencia de una trampa óptica en un gas cuántico. En concreto, nos centraremos en las resonancias inelásticas inducidas por el confinamiento *(inelastic confinement-induced resonances)*, que tienen su origen en el acoplamiento entre la coordenada del centro de masas y la coordenada relativa como consecuencia de los términos anarmónicos del potencial óptico. Estas resonancias ofrecen una alternativa a las resonancias de Feshbach para manipular y controlar el sistema. Aquí, nos centraremos en los efectos que las resonancias inelásticas tienen en dos experimentos recientes, llevados a cabo en la Innsbruck Universität (Austria) y en el Massachussets Institute of Technology (EE.UU.), en los que se ha demostrado, respectivamente, su existencia en trampas ópticas tridimensionales [**?**] y como consecuencia de interacciones *multipozo*[9,10].

Este es un trabajo conjunto con D. Capecchi, C. Cantillano, M. J. Mark, F. Meinert, A. Schindewolf, M. Landini, A. Saenz y H.-C. Nägerl.

Bibliografía

[1] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman y E. A. Cornell, Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor, *Science* **269**, 198-201 (1995).

[2] K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. R. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn y W. Ketterle, Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).

[3] C. Gross e I. Bloch, Quantum simulations with ultracold atoms in optical lattices, *Science* **357**, 995 (2017).

[4] J. J. García-Ripoll, P. Zoller e I. J. Cirac, Quantum information processing with cold atoms and trapped ions, *J. Phys. B* **38**, S567 (2005).

[5] C. Chin, R. Grimm, P. Julienne y E. Tiesinga, Feshbach resonances in ultracold gases, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 1225 (2010).

[6] F. Serwane , G. Zürn, T. Lompe, T. B. Ottenstein, A. N. Wenz y S. Jochim, Deterministic Preparation of a Tunable Few-Fermion System, *Science* **332**, 336-338 (2011).

[7] E. Haller, M. J. Mark, R. Hart, J. G. Danzl, L. Reichsöllner, V. Melezhik, P. Schmelcher y H.-C. Nägerl, Confinement-induced resonances in low-dimensional quantum systems, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 153203 (2010).

[8] Deborah Capecchi, Camilo Cantillano, 1 Manfred J. Mark, 1, 2 Florian Meinert, 3 Andreas Schindewolf, Manuele Landini, Alejandro Saenz, Fabio Revuelta y Hanns-Christoph Nägerl, Observation of confinement-induced resonances in a 3D lattice (2022), arXiv:2209.12504.

[9] Y. K. Lee, H. Lin y W. Ketterle, Spin dynamics dominated by superexchange via virtual molecules (2022), arXiv:2208.06054.

[10] Fabio Revuelta y Alejandro Saenz, *Multiwell effects on inelastic confinement-induced resonances* (en preparación).

4.4. The CP problem. Ionization, to and fro motion and exponentially small splitting (M. Ollé)

Resumen

We consider the problem of the hydrogen atom interacting with a circularly polarized microwave field (also called CP problem). We will describe several interesting phenomena related to ionization, to and fro motion and exponentially small splitting. Usual techniques of Dynamical Systems Theory are applied and the methodology and results discussed.

This is a joint work with E. Barrabés, F. Borondo, A. Delshams, D. Farrelly, J. M. Mondelo, J. R. Pacha, O. Rodríguez.

5. Sesión de tesis

5.1. Neuronal piecewise linear models reproducing bursting dynamics (J. Penalva)

Resumen

In this thesis, we focus on a piecewise linear simplification of the so-called Morris-Lecar model, a neural model widely known in the literature, which we call Piecewise Linear Morris-Lecar (PWL-ML) model. There, we divide the work into two main aims. Firstly, we study and categorize the bifurcation structure inherent to the PWL-ML model, revealing the presence of diverse bifurcation phenomena, primarily encompassing Hopf-like bifurcations, SNIC bifurcations, and homoclinic bifurcations, with the potential for other yet-unexplored forms. Secondly, we study the slow passage phenomena through different bifurcations. In this endeavor, we adopt a slow-fast system perspective, with the PWL-ML model constituting the fast subsystem and the bifurcation parameter serving as the slow variable, thereby establishing the slow subsystem. The slow passage phenomena are the results provoked by the interplay of the fast and the slow subsystems, emerging as a consequence of the gradual drift proximate to the bifurcation point within the fast subsystem. In our case, we study the slow passage through a Hopf-like bifurcation, through a homoclinic connection and finally through a SNIC bifurcation. The synthesis of these findings opens the door to explore the intricate bursting dynamics appearing in the PWL-ML model, providing a wide variety of complex dynamics.

5.2. Ejection-collision orbits: Some results and open questions (Ó. Rodríguez)

Resumen

The main objective of this talk is to present some results about the ejection-collision (EC) orbits in the circular Restricted Three Body Problem (RTBP).

In particular, we will focus on the analytical and numerical study of a very specific type of EC orbits, that we denote as n-EC orbits. An n-EC orbit is the orbit that describes the particle when it ejects from one primary and collides with it at the n relative minimum in the distance with respect to it. In this way, we will study numerically this kind of orbits and we will show analytically that for a sufficiently large value of the Jacobi constant (for which we will give an expression in terms of the mass parameter and the value of n) there exist exactly four n-EC orbits with well-defined characteristics.

In addition, we will present some open problems and discuss the next steps that we are taking.

This is a joint work with Tere Martínez-Seara, Mercè Ollé and Jaume Soler.

6. Sesión de nodos

6.1. Sistemas lineales a trozos: más de 25 años de estudio (de sevillanas maneras) (V. Carmona)

Resumen

Este año se cumplen veinticinco años de la publicación del *"artículo seminal"* de E. Freire et al. [1] y queremos aprovechar la ocasión para, con motivo de tal efeméride, ofrecer un pequeño resumen de las publicaciones más destacadas y resultados más relevantes en el área de los sistemas dinámicos lineales a trozos obtenidos por los miembros del nodo de la Universidad de Sevilla.

Comenzaremos la charla con un breve recorrido a través de la producción científica en el campo de los sistema planos con dos y tres zonas de linealidad, pasando posteriormente al terreno tridimensional, donde destacaremos aquellos resultados notorios acerca de la estabilidad de los puntos de equilibrio y la existencia de soluciones periódicas y conexiones globales.

No nos olvidaremos de mencionar las colaboraciones que durante estos años hemos mantenido con investigadores de otros nodos de la "Red DANCE", así como con investigadores internacionales. Es más que probable que sin estas inestimables cooperaciones gran parte los progresos en el análisis de los sistemas lineales a trozos no se hubiera producido.

Terminaremos la ponencia dando a conocer los nuevos enfoques y avances en el estudio de esta clase de sistemas, donde algunas pinceladas hacia trabajos futuros serán expuestas.

Bibliografía

[1] E. Freire, E. Ponce, F. Rodrigo & F. Torres, *Bifurcation Sets of Continuos Piecewise Linear Systems with Two Zones*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci Engrg., **8**, 2073–2097 (1998)

6.2. Sistemas dinámicos en Barcelona (M. Jorba)

Resumen

En esta charla presentaremos las principales líneas de investigación de dos de los nodos de la red afincados en Barcelona: El de la Universitat Politècnica de Catalunya (UPC) y el de la Universidad de Barcelona (UB). Estos nodos están vinculados a través de un seminario conjunto que lleva en funcionamiento des de los años noventa.

Las líneas de investigación de los nodos UPC y UB cubren un amplio abanico de problemas teóricos y aplicados. Entre estas líneas encontramos temas como Teoría KAM, Difusión de Arnold, escisión de separatrices, método de la parametrización, bifurcaciones y destrucción de objetos invariantes, desarrollo de métodos numéricos, dinámica holomorfa, mecánica celeste y astrodinámica, física de altas energías, biología computacional y neurociencia.

Los grupos asociados a estos nodos cuentan también con una vasta red de colaboradores internacionales.

6.3. Sistemas lineales a trozos: alternativa para la comprensión de la dinámica slow-fast (A. Teruel)

Resumen

En la sesión repasaremos fenómenos donde los sistemas lineales a trozos simplifican la comprensión de la dinámica slow-fast sin alterar sus características esenciales. Se presentarán también cuestiones relativas a trabajos futuros que se pretenden abordar el seno del nodo.

7. Sesión de pósteres

7.1. Limit cycles for a class of discontinuous piecewise differential systems (J. Jimenez)

Resumen

It is known that the piecewise differential systems in the plane $\mathbb{R}^2$ which are formed by linear centers and separated by a straight line of discontinuity have no limit cycles, but if they are separated by other types of discontinuity curves, such as conics, then they can have limit cycles. The limit cycles of the piecewise differential systems in $\mathbb{R}^2$ have been studied intensively in the last years but this is not the case for piecewise differential systems in the space $\mathbb{R}^3$.

The goal of this work is to study the maximum number of limit cycles of discontinuous piecewise differential systems in $\mathbb{R}^3$ separated by a quadric that defines a surface, and formed by linear differential systems similar to linear centers in the plane.

Bibliografía

[1] J. Jimenez, J. Llibre, and J.C. Medrado, *Crossing limit cycles for a class of piecewise linear differential centers separated by a conic*, Electron. J. Differential Equations **41**, pp. 1–36 (2020)

[2] J. Llibre and M. A. Teixeira, *Piecewise linear differential systems with only centers can create limit cycles?*, Nonlinear Dyn., **91**(1), 249–255 (2018)

[3] J. Llibre and C. Valls, *Crossing limit cycles for discontinuous piecewise differential systems formed by linear Hamiltonian saddles or linear centers separated by a conic*, Chaos, Solitons & Fractals, **159**, 112076 (2022)

[4] Y. Villanueva, J. Llibre, and R. Euzébio, *Limit cycles of generic piecewise center-type vector fields in $\mathbb{R}^3$ separated by either one plane or by two parallel planes*, Bull. Sci. Math., **179**(22), 103173, pp. 1–14 (2022)

7.2. Extension of Delaunay Normalisation for Arbitrary powers of the distance (E. Lanchares)

Resumen

In the framework of perturbed Keplerian systems we deal with the Delaunay normalisation for a wide class of perturbations such that the radial distance is raised to any real number. The averaged function is expressed in terms of the Gauss hypergeometric function 2F1 whereas the corresponding generating function is the so called Appell function F1. The Gauss hypergeometric function depends on the eccentricity, e, whereas the Appell function depends additionally on the eccentric anomaly, E, and both special functions are properly defined and evaluated for all $e \in [0, 1]$, $E \in [-\pi, \pi]$. When the exponent of the radial distance is an integer, the usual values of the averaged and generating functions are recovered.

7.3. Effect of players' expectations and memory on the chaotic dynamics of a quantum Cournot game (J.C. Losada)

Resumen

The study of Game Theory is widely developed currently and has many applications in several fields such as economics, psychology, biology, etc. The use of quantum theory is a demonstrated way to improve the results comparing to the classic games due to the entanglement between the players. As well, it is known the positive effect of implementing long term memory in the stability of a dynamical system. In this context, memory is applied to the model of a quantum dynamical Cournot duopoly game considering two different cases, depending on the players' expectations and the mechanisms they used to maximize their profits. In this work we analyse the game with homogeneous players, considering two boundedly rational players, and the game with heterogeneous expectations, where one of the players is boundedly rational and the other one is a naive player, comparing the results obtained in both cases. Firstly, we come to the conclusion that neither memory nor the type of players (heterogeneous or homogeneous) produces variations in the stable fixed points comparing to the quantum, or even, classic Cournot duopoly game and, therefore, Nash equilibrium is preserved. Secondly, it is observed that the game with homogeneous players, which is not deeply studied previously in quantum games, can improve the local stability of the system versus the game with heterogeneous players, under certain conditions. Finally, it is shown the role of memory as an effective mechanism of chaos control. This achievement is a remarkable economic advantage, since enables the system to reach the stability faster. Throughout this article, these statements are proved analytically and supported widely with several numerical simulations, using different values of the memory factor.

Bibliografía

[1] J Grau-Climent, L Garcia-Perez, R Alonso-Sanz, JC Losada. Effect of players' expectations and memory in a quantum Cournot game. Chaos, Solitons & Fractals 175, 113950 (2023)

[2] L Garcia-Perez, J Grau-Climent, R Alonso-Sanz, JC Losada, Complex dynamics of a Cournot quantum duopoly game with memory and heterogeneous players Entropy 24 (10), 1333 (2022)

7.4. Splitting and Coexistence of Strange Attractors for a New Family of 2-D Tent Maps (A. Marqués-Lobeiras)

Resumen

We prove the existence of strange attractors for a two-parameter family of expanding baker maps that extends the classical tent maps to the real plane and generalizes a one-parameter family of two-dimensional tent maps introduced by A. Pumariño, J. Á. Rodríguez, J. C. Tatjer, and E. Vigil. Also, we study how such attractors split into other ones of a larger number of connected components under certain conditions.

7.5. Study of the dynamics of the coupled brusselator system (A. Mayora-Cebollero)

Resumen

The Brusselator model is a theoretical model that represents an autocatalytic chemical reaction with oscillations (as the Belousov-Zhabotinsky reaction). Coupled Brusselator System is obtained coupling two identical Brusselators by diffusion. This system has four non-negative variables, two positive parameters and two non-negative parameters corresponding to the coupling by diffusion.

In the literature we can find two different chaotic regions [1,2] in different zones of the parametric space. With the definition of a new parameter and using continuation, we study if these two chaotic regions are connected or not. Moreover, we use several techniques as the spike-counting sweeping, Lyapunov Exponents, continuation, ... to analyse the dynamical behaviour of the system [3,4].

Bibliografía

[1] I. Schreiber and M. Marek, *Strange attractors in coupled reaction-diffusion cells.* Physica D: Nonlinear Phenomena, 5(2-3), 258-272, 1982

[2] F. Drubi, S. Ibáñez and J. Á. Rodríguez, *Singularities and chaos in coupled systems.* Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin, 15(5), 797-808, 2008.

[3] F. Drubi, A. Mayora-Cebollero, C. Mayora-Cebollero, S. Ibáñez, J.A. Jover-Galtier, Á. Lozano, L. Pérez and R. Barrio, *Connecting chaotic regions in the Coupled Brusselator System.* Chaos, Solitons & Fractals, 169, 113240, 2023.

[4] A. Mayora-Cebollero, J.A. Jover-Galtier, F. Drubi, S. Ibáñez, Á. Lozano, C. Mayora-Cebollero and R. Barrio, *Synchronization phenomena in the Coupled Brusselator System. Preprint*, 2023.

7.6. Deep learning for chaos detection in a dynamical system (C. Mayora-Cebollero)

Resumen

Deep Learning (DL) includes all the techniques that use (Deep) Artificial Neural Networks to learn from data with several levels of abstraction. DL has been used in a wide range of tasks and good results have been obtained, so recently several authors have proposed to use it to deal with dynamical systems problems as chaos detection [1,2].

In this poster, we focus on detecting chaotic regions in the parametric space of a dynamical system. We compare the results obtained with DL and with the classical technique of Lyapunov Exponents, and we show the advantages of using DL [3].

Bibliografía

[1] N. Boullé, V. Dallas, Y. Nakatsukasa, D. Samaddar, *Classification of chaotic time series with Deep Learning.* Physica D, 403, 2020.

[2] A. Celletti, C. Gales, V. Rodriguez-Fernandez, M. Vasile, *Classification of regular and chaotic motions in Hamiltonian systems with Deep Learning.* Scientific Reports, 12(1), 2022.

[3] R. Barrio, Á. Lozano, A. Mayora-Cebollero, C. Mayora-Cebollero, A. Miguel, A. Ortega, S. Serrano, R. Vigara, *Deep Learning for chaos detection.* Chaos, 33(7), 2023.

7.7. Bifurcaciones Hopf-Hopf en un sistema de FitzHugh-Nagumo acoplados (D. Noriega)

Resumen

Las ecuaciones de FitzHugh-Nagumo son un sistema bidimensional de ecuaciones diferenciales que manifiesta una bifurcación de Hopf bajo ciertas restricciones sobre sus parámetros.

En este póster, exploramos la dinámica de un acoplamiento lineal de dos sistemas FitzHugh-Nagumo distintos; particularmente, el objeto de nuestro estudio serán las bifurcaciones Hopf-Hopf que surgen de este acoplamiento. Nuestro objetivo será determinar todos los tipos distintos de Hopf-Hopf que pueden ser encontradas en este sistema y analizar la dinámica subsecuente.

7.8. Smoothing of nonsmooth differential systems near regular-tangential singularities (G. Rondón)

Resumen

Understanding how tangential singularities evolve under smoothing processes was one of the first problem concerning regularization of Filippov systems. In this work, we are interested in Cn-regularizations of Filippov systems around visible regular-tangential singularities of even multiplicity. More specifically, using Fenichel Theory and Blow-up Methods, we aim to understand how the trajectories of the regularized system transits through the region of regularization. We apply our results to investigate $\mathcal{C}^n-$regularizations of boundary limit cycles with even multiplicity contact with the switching manifold.

Joint work with Douglas Novaes (Universidade Estadual de Campinas).

DDN is partially supported by FAPESP grants 2018/16430-8, 2018/13481-0, and 2019/10269-3, and by CNPq grants 306649/2018-7 and 438975/ 2018-9. GR is partially supported by FAPESP grant 2020/06708-9 and 2022/12123-9.

Bibliografía

[1] D.D. Novaes and G. Rondón, *Smoothing of nonsmooth differential systems near regular-tangential singularities and boundary limit cycles.* Nonlinearity 34, 4202-4263 (2021).

[2] P.R. da Silva, I.S. Meza-Sarmiento, D.D. Novaes, *Nonlinear Sliding of Discontinuous Vector Fields and Singular Perturbation.* Differ Equ Dyn Syst (2018) https://doi.org/10.1007/s12591-018-0439-1.

[3] P.R. da Silva, J.R. de Moraes, *Piecewise-Smooth Slow–Fast Systems.* J. Dyn. Control Syst. 27, 67–85 (2021).

[4] J. Sotomayor, M.A. Teixeira, *Regularization of discontinuous vector fields.* International Conference on Differential Equations, Lisboa, 207–223 (1996).

[5] P. Szmolyan, *Transversal heteroclinic and homoclinic orbits in singular perturbation problems.* J. Diff. Eq. 92, 252–281 (1991).

[6] S. Wiggins, *Normally Hyperbolic Invariant Manifolds in Dynamical Systems.* Springer (1994).

7.9. Characterization of the spectra of the Hill's equation and application to nonlinear boundary problems (M. Yousfi)

Resumen

In the poster we will characterize the spectrum of the second order Hill's equation coupled to several boundary value conditions. More concisely, the idea consists of study the spectrum of the second-order differential Hill's equation coupled to Initial, Final, Neumann, Dirichlet, Periodic and Mixed boundary conditions, by applying the equality (10) proved by the authors in [5] and expressing the Green's function of the Hill's equation coupled to a given boundary condition as a combination of the Green's function related to another different boundary condition. These spectra are characterized as suitable sets of real values that verify an equality that depends on the Green's function of each case. We will also deduce some properties of these spectra and identities between Green's functions. The work continuous on the lines initiated on [6] and [3]. It is important to remark that the ideas and arguments used to deduce the comparison between the corresponding spectrum of the considered problems, and their characterization in many cases, are completely different to the ones used in [3].

This work is supported by Grant PID2020-113275GB-I00 funded by MCIN/AEI/10.13039/501100011033 and by "ERDF A way of making Europe" of the European Union.

Bibliografía

[1] A. Cabada, L. López-Somoza, M. Yousfi,*Characterization of the spectra of the Hill's equation coupled to different boundary value conditions and application to nonlinear boundary problems.* Filomat, 2023.

[2] A. Cabada, *Green's Functions in the Theory of Ordinary Differential Equations.* Springer Briefs in Mathematics, Springer, New York, 2014.

[3] A.Cabada, J.Á. Cid, L. López-Somoza, *Green's functions and spectral theory for the Hill's equation.* Appl. Math. Comput. 286, 88-105, 2016.

[4] A. Cabada, J.Á. Cid, L. L´opez-Somoza, *Maximum principles for the Hill's equation.* Academic Press, London, 2018.

[5] A. Cabada, L. L´opez-Somoza, M. Yousfi, *Green's function related to a n-th order linear differential equation coupled to arbitrary linear non-local boundary conditions.* Mathematics, 9, 1948, 2021

[6] A. Cabada, L. López-Somoza, M. Yousfi, *Relationship of the Green's functions related to the Hill's equation coupled to different boundary value conditions*, preprint, 2023.

[7] B. Grébert, T. Kappeler, J. Pöschel, *A note on gaps of Hill's equation.* Int. Math. Res. Not., 50, 2703-2717, 2004.