

El modelo de Hindmarsh-Rose: estructura homoclínica y procesos de spike-adding

L. Pérez, R. Barrio, S. Ibáñez y S. Serrano



Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Contenido

1. Introducción

- Modelos neuronales. Modelo de Hindmarsh-Rose.
- Preliminares técnicos.

2. Bifurcaciones homoclínicas en el modelo de Hindmarsh-Rose

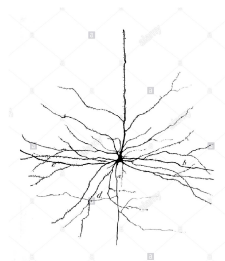
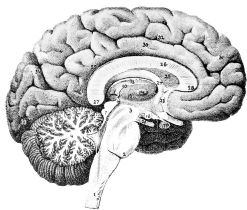
- Evolución de mapas biparamétricos cuando el sistema se aproxima a su límite singular.
- Diagrama de bifurcación triparamétrico.

3. Procesos de spike-adding en el modelo de Hindmarsh-Rose.

- Bifurcaciones homoclínicas y procesos de spike-adding.
- Clasificación y localización de procesos de spike-adding.
- Mecanismos de transición.

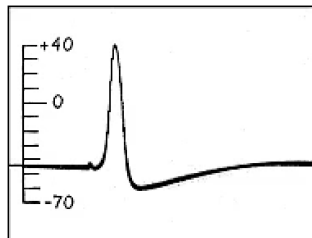
Motivación

- Comprender la dinámica cerebral
- Tratamiento de ciertas patologías como la enfermedad de Parkinson o la epilepsia, relacionadas con fenómenos de sincronización.



Modelos neuronales

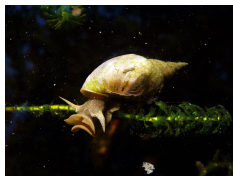
- Hodgkin-Huxley (1952)
- FitzHugh-Nagumo (1961)
- Morris-Lecar (1981)
- Hindmarsh-Rose (1984)
- Izhikevich (2003)
- ...



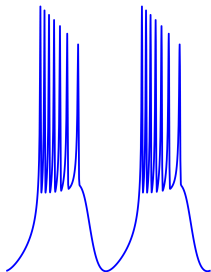
El modelo de Hindmarsh-Rose (1984)

$$\begin{cases} \dot{x} = y - ax^3 - bx^2 + I - z \\ \dot{y} = c - dx^2 - y \\ \dot{z} = \varepsilon(s(x - x_0) - z) \end{cases}$$

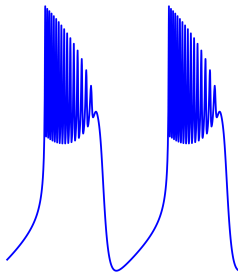
x: potencial de membrana
y: corrientes iónicas rápidas
z: corrientes iónicas lentas
($0 < \varepsilon \ll 1$)



Bursting en el modelo de Hindmarsh-Rose



- **Fold/homoclinic.**
- Modelos de células β pancreáticas y de neuronas en el complejo pre-Botzinger.



- **Fold/Hopf.**
- Modelos de células β pancreáticas y de algunos sistemas enzimáticos.

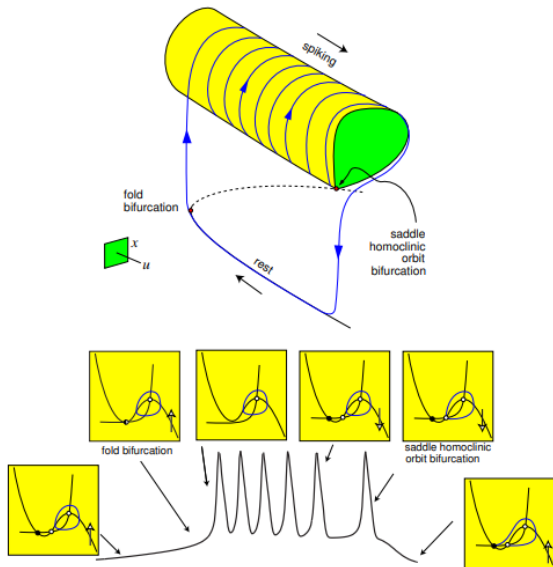
Dinámica fast-slow: Teoría de Fenichel ($0 < \varepsilon \ll 1$)

- Para $\varepsilon = 0$, tenemos el sistema *congelado*

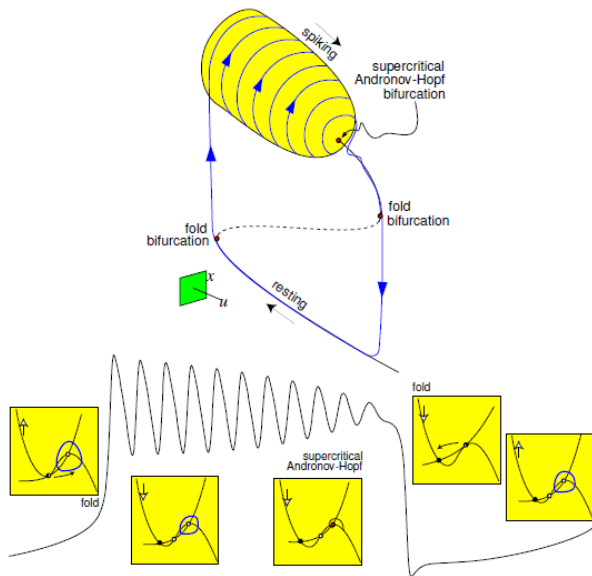
$$\begin{cases} \dot{x} = y - ax^3 - bx^2 + I - z \\ \dot{y} = c - dx^2 - y \end{cases}$$

- Para cada valor de z , consideremos los equilibrios y ciclos límite.
- Al mover z , obtenemos variedades invariantes formadas por puntos de equilibrio (M_{slow}) y variedades invariantes formadas por órbitas periódicas (M_{fast}).
- Mientras estas variedades sean normalmente hiperbólicas, serán persistentes en el sistema global.

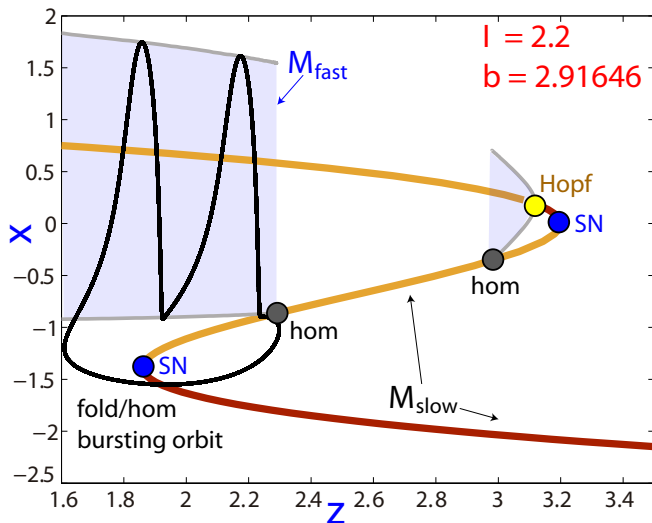
Configuración fold/hom



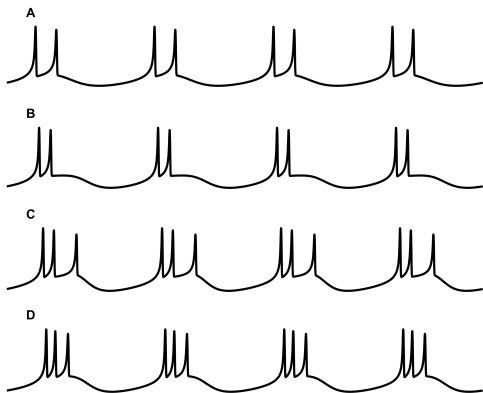
Configuración fold/Hopf



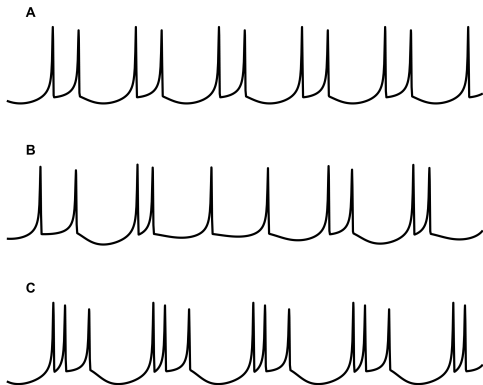
Variedad secundaria de ciclos límite



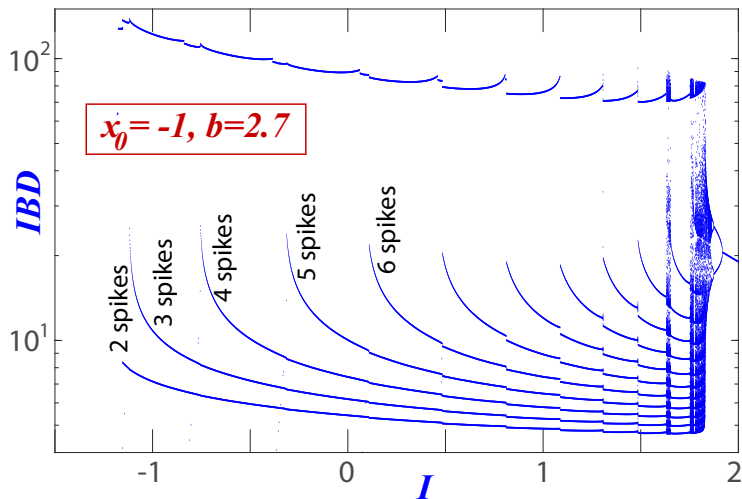
Spike-adding según Terman (1991): caso continuo



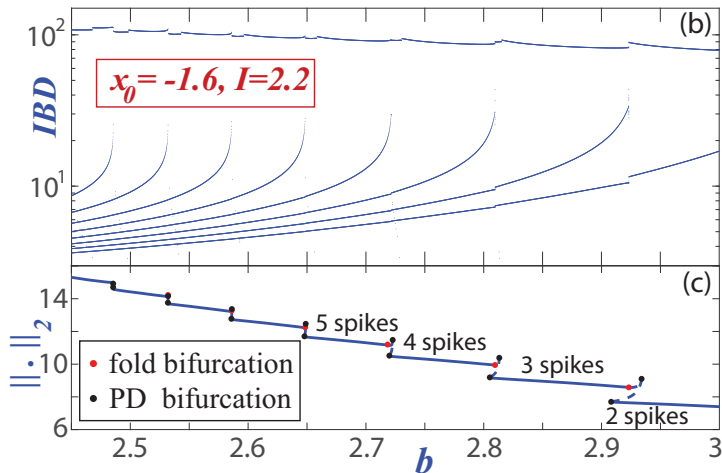
Spike-adding según Terman (1991): caso caótico



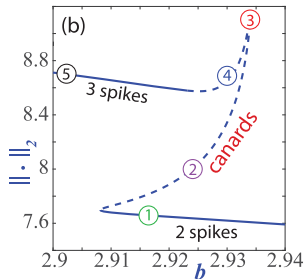
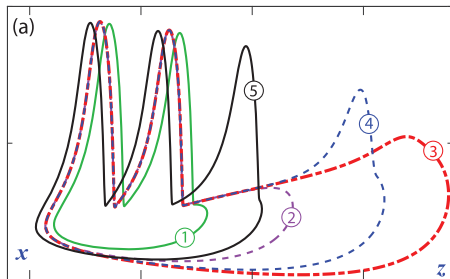
Intervalos entre spikes: diagramas IBD



Spike-adding continuo (I)

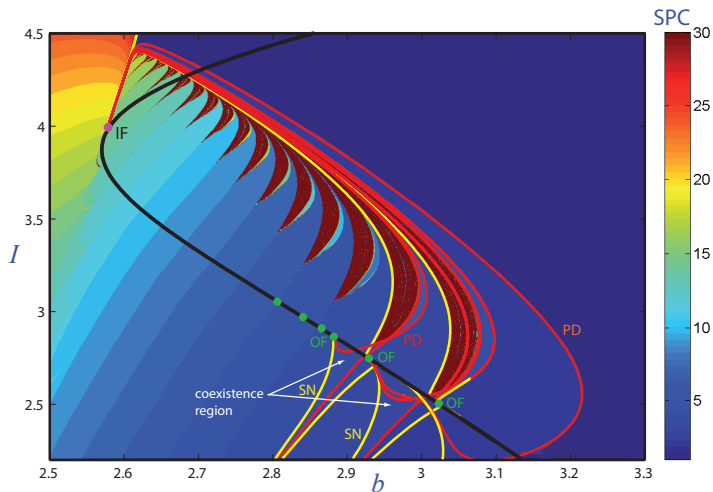


Spike-adding continuo (II)



¹Innocenti et al, Chaos 2007.

Mapa de spike-counting en (b, I) para $\varepsilon = 0.01$



²Storace et al, Chaos 2008

³Linaro et al, SIADS 2012

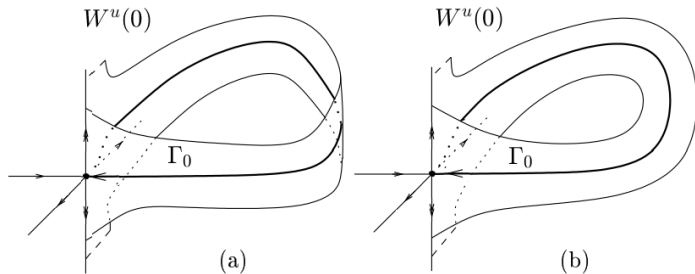
⁴Barrio et al, Chaos 2014

Órbitas homoclínicas en \mathbb{R}^3

Sea Γ_0 una órbita homoclínica al origen, y sean los autovalores correspondientes $\lambda_s < 0 < \lambda_u < \lambda_{uu}$. Genéricamente,

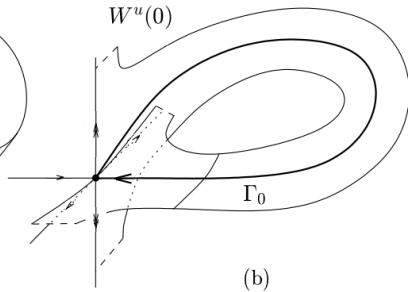
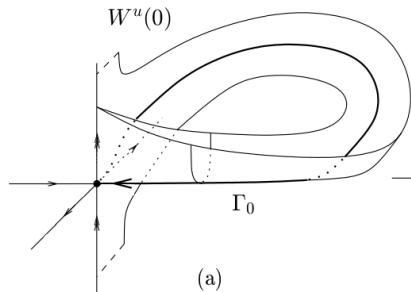
(H1) $\Gamma_0 \not\subset W^{uu}(0)$.

(H2) La intersección de $W^{cs}(0)$ y $W^u(0)$ es transversal a lo largo de Γ_0 .



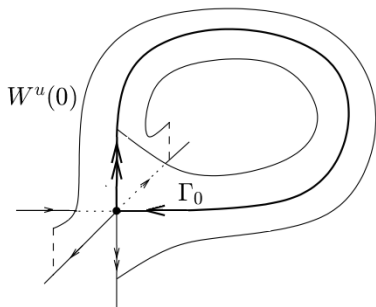
Inclination-flip (IF)

Se cumple (H1) pero no (H2): pérdida de la transversalidad.



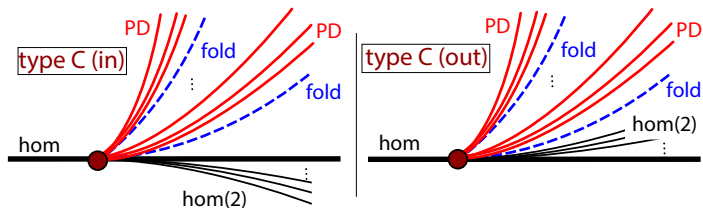
Orbit-flip (OF)

Se cumple (H2) pero no (H1): la órbita está contenida en la variedad inestable fuerte.

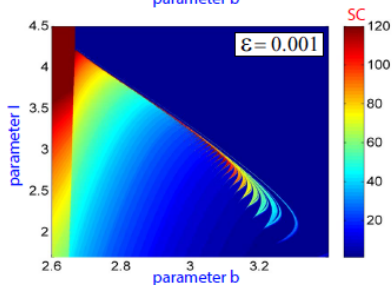
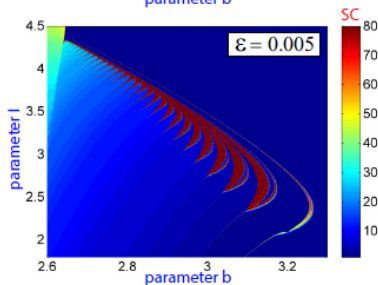
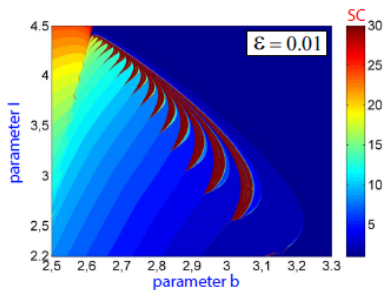
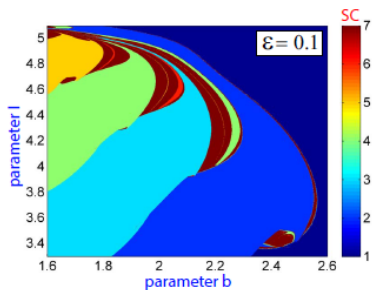


Despliegue de IF y OF: caso C

- En función de ciertas relaciones entre los autovalores, existen diferentes despliegues.
- En el modelo de Hindmarsh-Rose sólo hemos encontrado el caso C:



Evolución al variar ε : mapas de SC



Nuestros objetivos

Estudiar qué ocurre cuando ε cambia

- ¿Por qué se pierden bandas de bursting cuando ε crece?
- ¿Cómo influye el valor de ε en los diagramas de bifurcación en (b, I) ?

Procesos de spike-adding

- ¿Cuál es el rol de la estructura homoclínica en su organización?
- ¿Cómo se producen las transiciones?

Contenido

1. Introducción

- Modelos neuronales. Modelo de Hindmarsh-Rose.
- Preliminares técnicos.

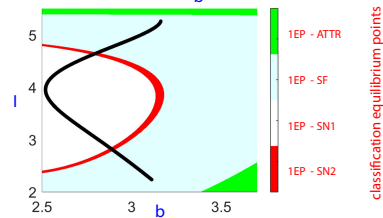
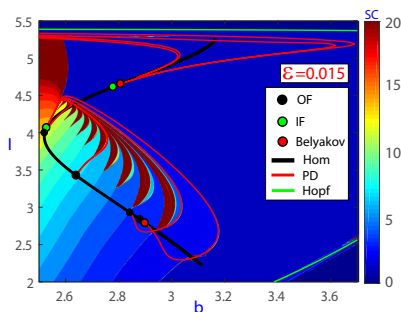
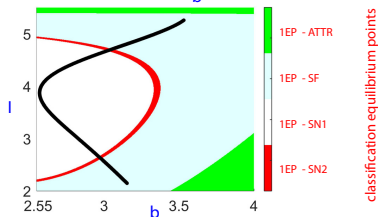
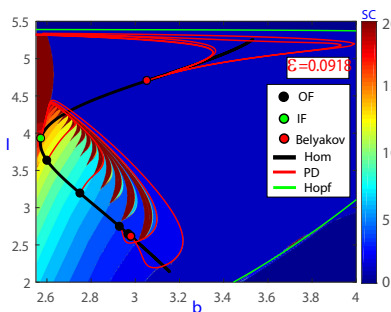
2. Bifurcaciones homoclínicas en el modelo de Hindmarsh-Rose

- Evolución de mapas biparamétricos cuando el sistema se aproxima a su límite singular.
- Diagrama de bifurcación triparamétrico.

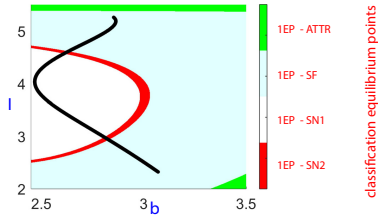
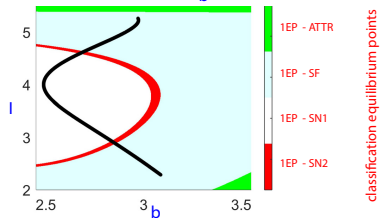
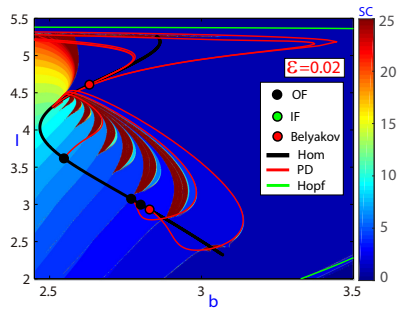
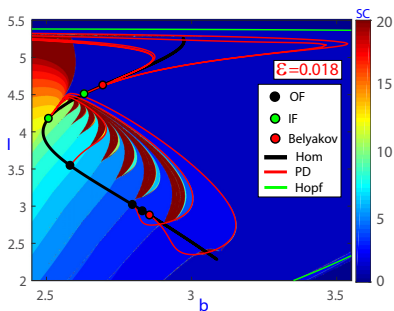
3. Procesos de spike-adding en el modelo de Hindmarsh-Rose.

- Bifurcaciones homoclínicas y procesos de spike-adding.
- Clasificación y localización de procesos de spike-adding.
- Mecanismos de transición.

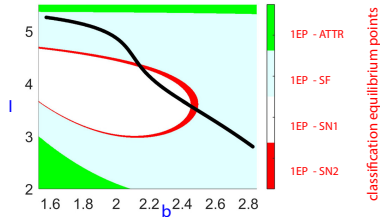
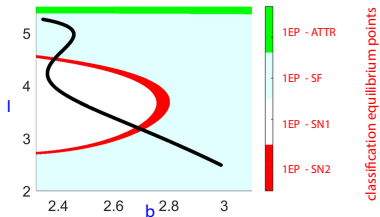
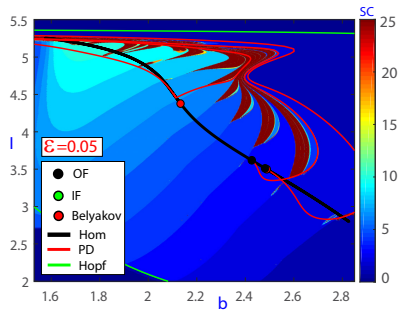
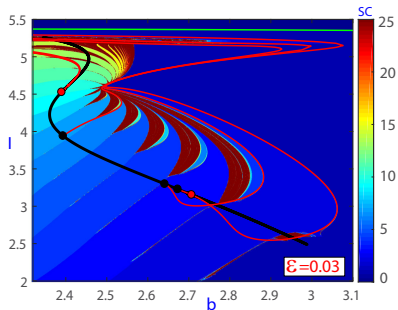
Evolución de los diagramas cuando ε crece



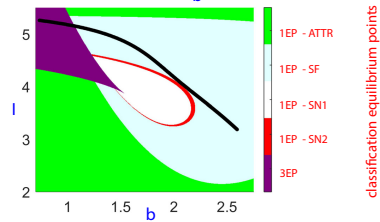
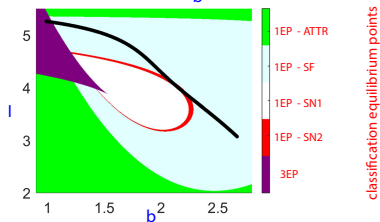
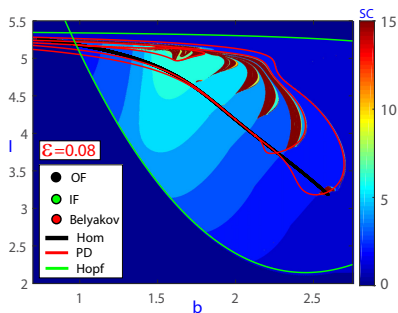
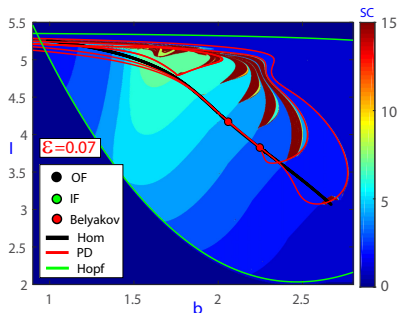
Evolución de los diagramas cuando ε crece (II)



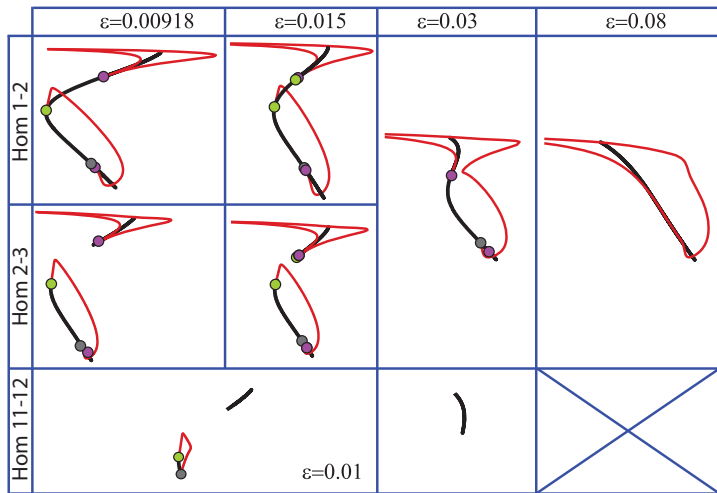
Evolución de los diagramas cuando ε crece (III)



Evolución de los diagramas cuando ε crece (IV)

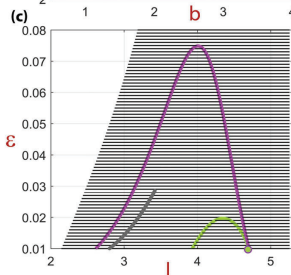
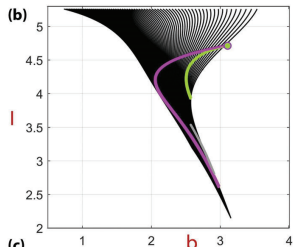
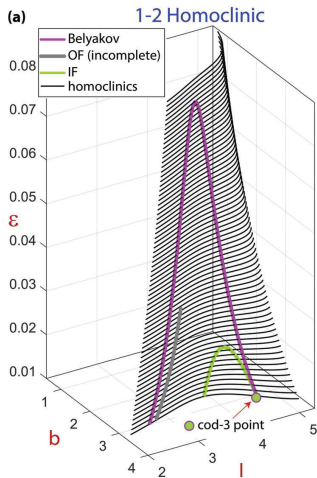


Curvas de bifurcación $hom(n, n + 1)$ para distintos valores de ε

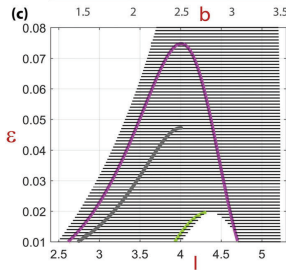
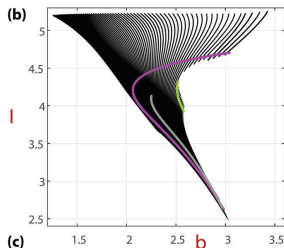
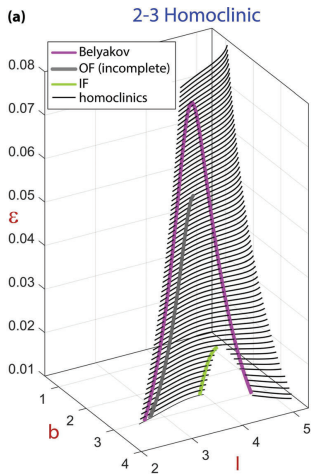


● IF
 ● OF
 ● Belyakov
 — PD
 — homoclinic

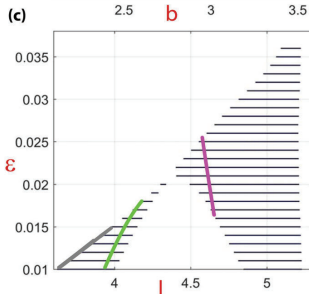
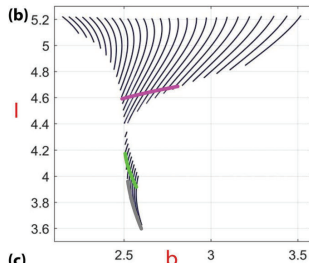
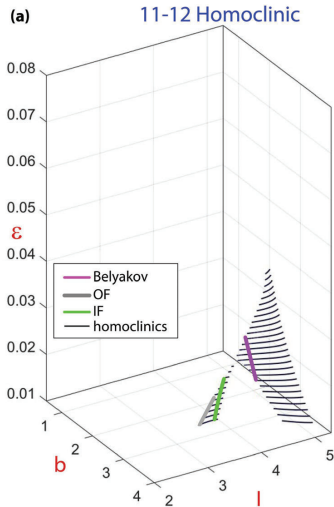
Superficie de bifurcación $hom(1, 2)$



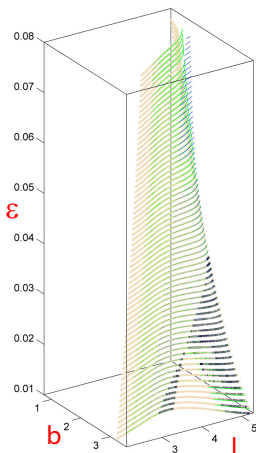
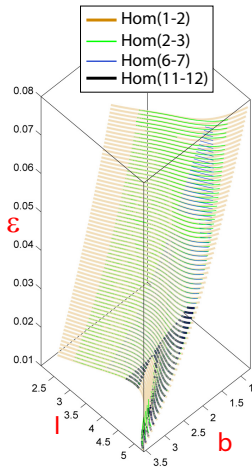
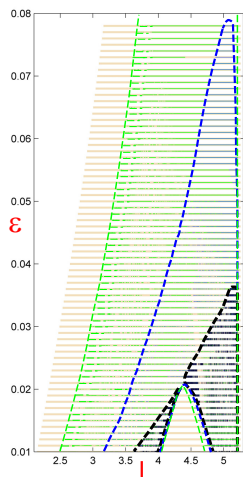
Superficie de bifurcación $hom(2, 3)$



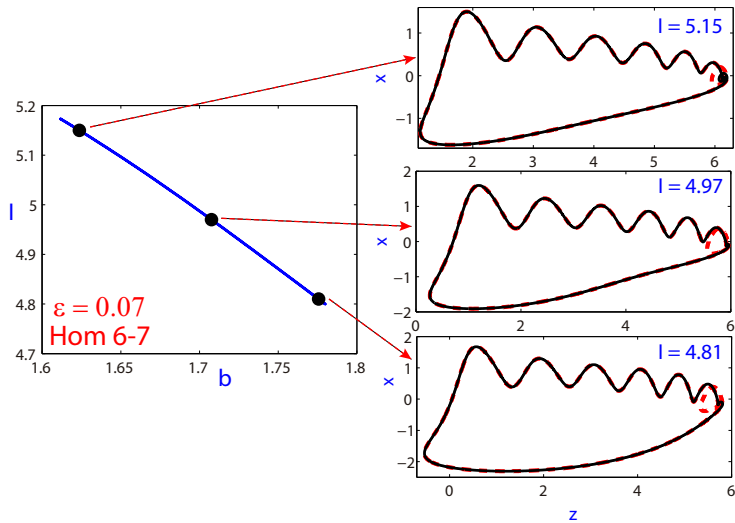
Superficie de bifurcación $hom(11, 12)$



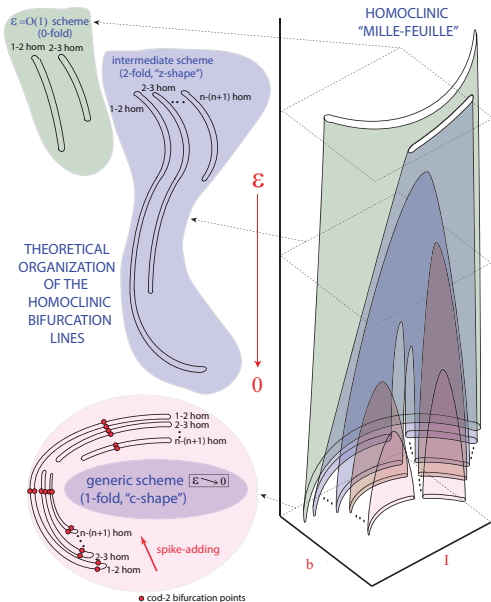
Comparación de las distintas superficies de bifurcación



Isolas homoclínicas



Visión global: milhojas homoclínico



Contenido

1. Introducción

- Modelos neuronales. Modelo de Hindmarsh-Rose.
- Preliminares técnicos.

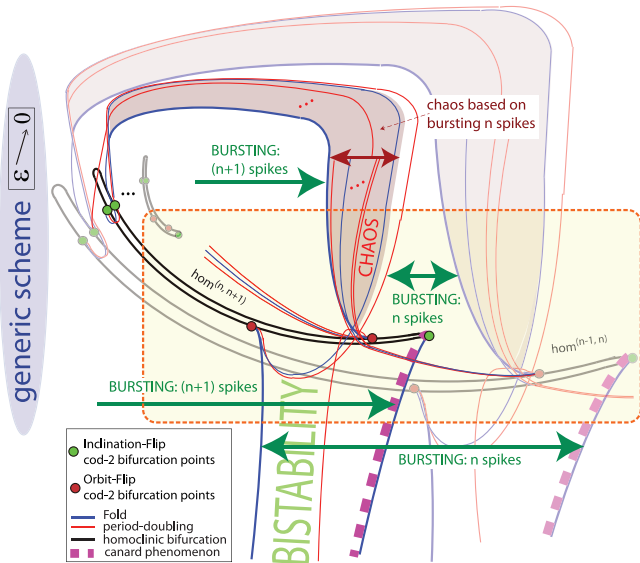
2. Bifurcaciones homoclínicas en el modelo de Hindmarsh-Rose

- Evolución de mapas biparamétricos cuando el sistema se aproxima a su límite singular.
- Diagrama de bifurcación triparamétrico.

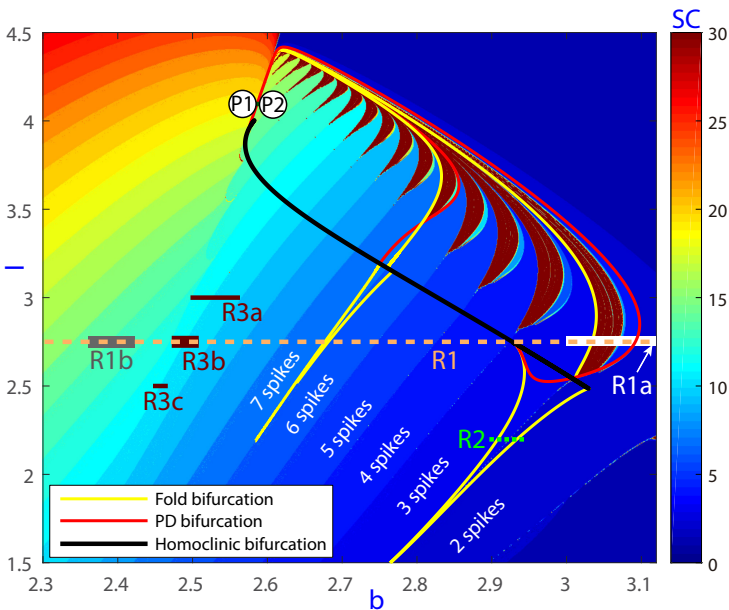
3. Procesos de spike-adding en el modelo de Hindmarsh-Rose.

- Bifurcaciones homoclínicas y procesos de spike-adding.
- Clasificación y localización de procesos de spike-adding.
- Mecanismos de transición.

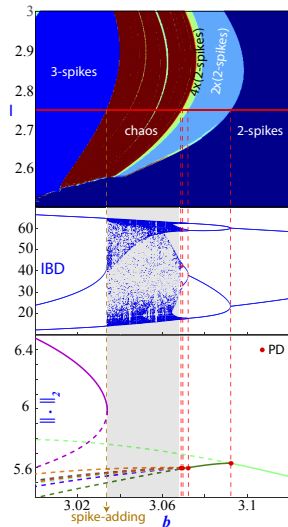
Estructura homoclínica en el bursting fold/hom



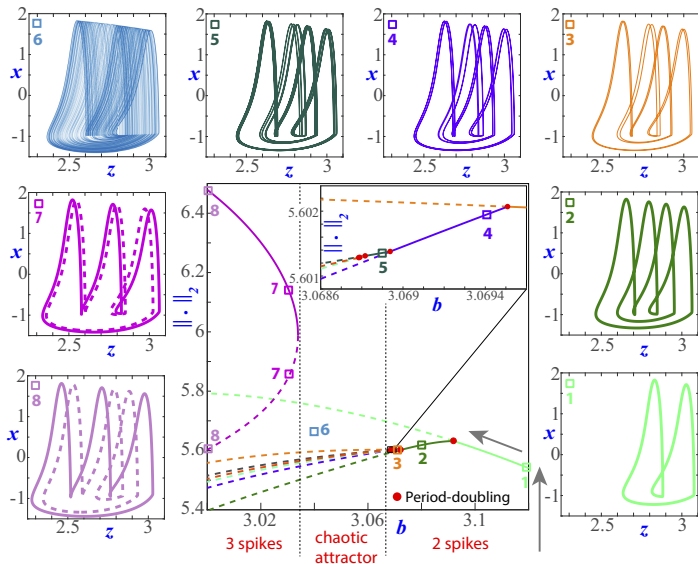
Distintos procesos de spike-adding



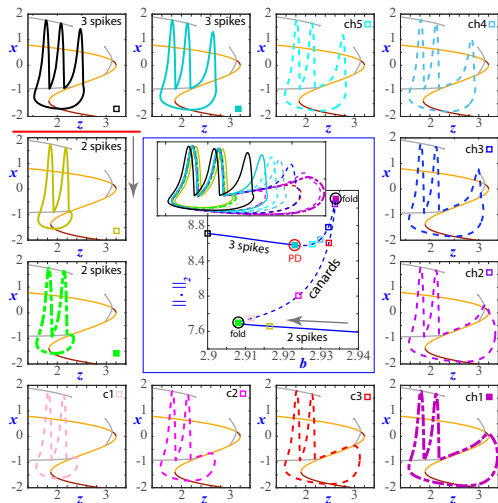
Spike-adding discontinuo inducido por caos



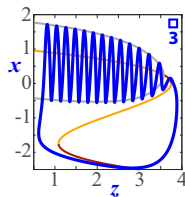
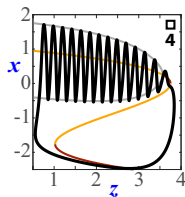
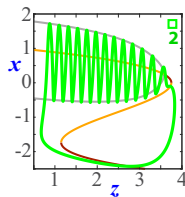
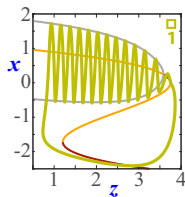
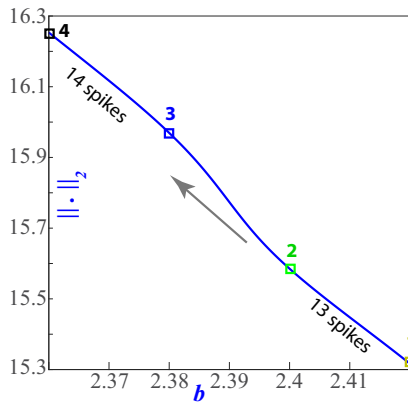
Spike-adding discontinuo inducido por caos (II)



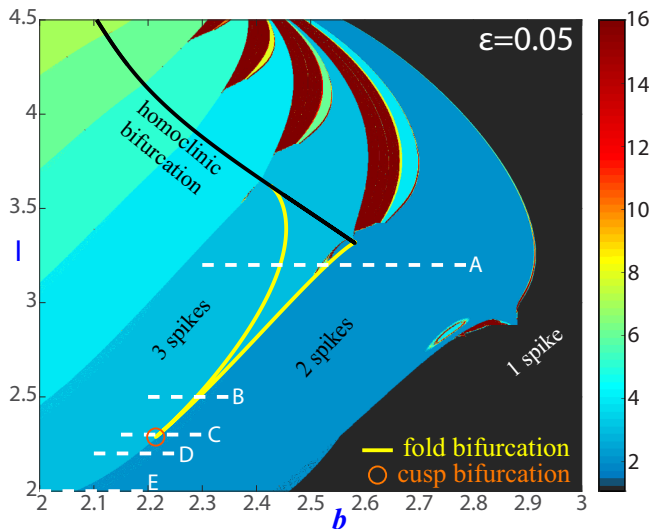
Spike-adding continuo inducido por canards



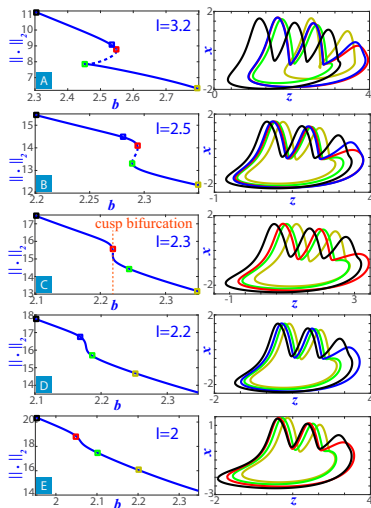
Spike-adding continuo inducido por Hopf



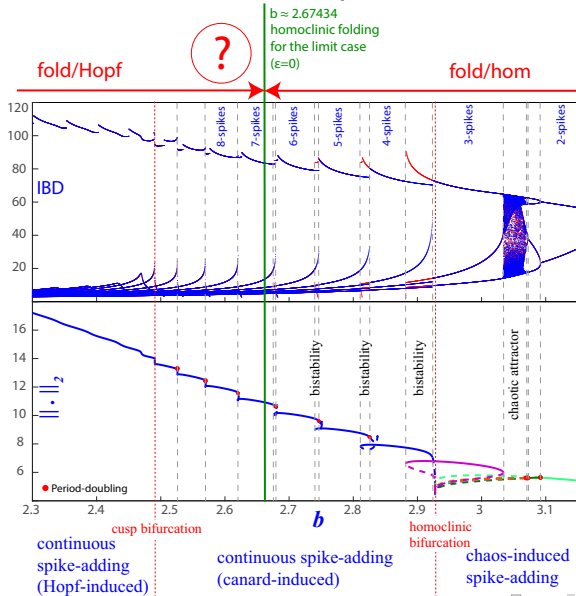
Bifurcaciones de cúspide: transición entre spike-adding inducido por canards e inducido por Hopf



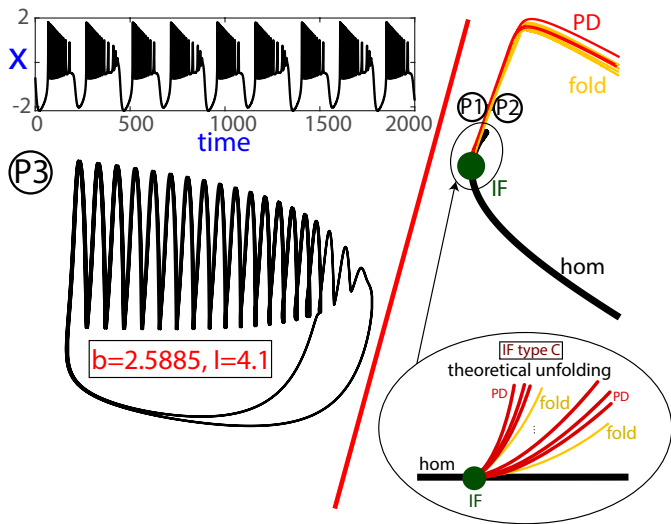
Bifurcaciones de cúspide: transición entre spike-adding inducido por canards e inducido por Hopf (II)



Bifurcación homoclínica: transición entre spike-adding inducido por canards e inducido por caos



Despliegue del inclination-flip: transición entre spike-adding inducido por caos e inducido por Hopf



Mapa de procesos de spike-adding

