El problema de centro. Una visión desde la forma normal

A. Algaba, C. García

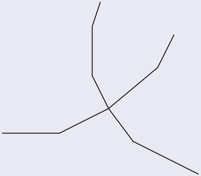
Ddays 2014
Badajoz, Noviembre 2014

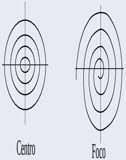
Contenido

Problema de monodromía

Sea el sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$, $\mathbf{F} \in \mathcal{C}^{\omega}(U)$, U entorno de O en el plano, $\mathbf{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, O un equilibrio aislado

Problema de Monodromía. (Seidenberg, Dumortier, Andreev, Mevdeveva). Mediante Blow-ups





No monodrómico   Monodrómico

Distinguir un centro de un foco es el **problema del centro** (Poincaré)

Descomposición conservativa-disipativa

Lema

Dado un tipo $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$ *y un campo* $\mathbf{F}_r \in \mathcal{Q}_r^{\mathbf{t}}$ *existen unos únicos polinomios* $\mu \in \mathcal{P}_r^{\mathbf{t}}$ *y* $h \in \mathcal{P}_{r+|\mathbf{t}|}^{\mathbf{t}}$ *tales que*

$$\mathbf{F}_r = \mathbf{X}_h + \mu \mathbf{D}_0,$$

donde $\mathbf{D}_0 = (t_1 x, t_2 y)^T$, $\mathbf{X}_h = (-\frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial x})^T$. *Además:*

$$\mu = \frac{1}{r+|\mathbf{t}|}\operatorname{div}(\mathbf{F}_r) \quad y \quad h = \frac{1}{r+|\mathbf{t}|}\mathbf{D}_0 \wedge \mathbf{F}_r$$

Ejemplo

$\mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} y + ax^2 \\ bx^3 + cxy \end{pmatrix} \in \mathcal{Q}_1^{(1,2)}$ entonces $\mathbf{F}_r = \mathbf{X}_h + \mu \mathbf{D}_0$ donde

$$\mathbf{D}_0 = \begin{pmatrix} x \\ 2y \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} h &= \frac{\mathbf{D}_0 \wedge \mathbf{F}_1}{r+|\mathbf{t}|} = \frac{bx^4 + (c-2a)x^2 y - 2y^2}{4}, \\ \mu &= \frac{\operatorname{div}(\mathbf{F}_1)}{r+|\mathbf{t}|} = \frac{2a+c}{4} x \end{aligned}$$

Problema de Monodromía

Dado un campo vectorial analítico y fijado un tipo

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_r + \cdots = \left(\mathbf{X}_{h_1} + \mu_1 \mathbf{D}_0\right) + \cdots$$

Mediante un cambio de variables y del tiempo, **F** se transforma en

$$\mathbf{G} = \mathbf{X}_H + \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^* \mathbf{D}_0, \quad (H = h_1 + \cdots \text{ polinomial})$$

Problema abierto

Dar condiciones sobre el Hamiltoniano polinomial H para que el campo vectorial **F** sea monodrómico

Problema del centro

Si $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ posee un centro en O, mediante un cambio lineal y un escalado en el tiempo, el sistema se transforma en:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} &=& -y + P(x,y) \\ \dot{y} &=& x + Q(x,y) \end{array} \right. \qquad \textbf{(No degenerado)}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} &=& y + P(x,y) \\ \dot{y} &=& Q(x,y) \end{array} \right. \qquad \textbf{(Nilpotente)}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} &=& P(x,y) \\ \dot{y} &=& Q(x,y) \end{array} \right. \qquad \textbf{(Degenerado)}$$

donde $P, Q = \mathcal{O}(\|x,y\|^2)$.

- Problema de caracterización teórica de centros.
- Problema de cómputo (Calcular familias de centros).

Caracterización teórica de centros

Teorema (Condición necesaria y suficiente (Mazzi y Sabatini, JDE 87))

$\mathbf{F}$ *tiene un centro en* $O \Leftrightarrow \exists\ I \in \mathcal{C}^{\infty}(U)$, *(flat en O), integral primera de* $\mathbf{F}$.

Definición (Integral primera)

$I \in \mathcal{C}^0$ *es una integral primera de* $\mathbf{F}$ *sobre* U*, si todas las órbitas de* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ *están sobre las curvas de nivel* $I =$ *cte. Si* $I \in \mathcal{C}^1$ *entonces* $\nabla I \cdot \mathbf{F} = 0$.

Condiciones necesarias de centro

Teorema (Mazzi y Sabatini, JDE 87)

F *tiene un centro en* $O \Rightarrow \exists V \in \mathcal{C}^\infty(U)$, *(flat en O), factor integrante inverso de* **F**.

Definición (factor integrante inverso)

$V \in \mathcal{C}^1$ *es un factor integrante inverso (f.i.i.) de* **F** *sobre* U *si* $V \not\equiv 0$ *y* $\nabla V \cdot \mathbf{F} - div(\mathbf{F})V = 0$.

Teorema (Giné y Peralta, JDE 2012)

F *tiene un centro en* $O \Rightarrow \exists G \in \mathcal{C}^\infty(U)$, *(flat en O),* **G** *transversal a* **F** *en* U, $\mu \in \mathcal{C}^\infty(U)$, *(flat en O), tal que* $[\mathbf{F}, \mathbf{G}] = \mu \mathbf{F}$. *(***G es una simetría de Lie de F***)*

Centro no degenerado

Teorema

El sistema $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} + \cdots$ *tiene un centro en* $O \Leftrightarrow$ *se cumple alguna de las siguientes condiciones*

1) *Existe una integral primera formal (analítica)* $I = x^2 + y^2 + \cdots$, *(Poincaré-Lyapunov)*
2) $\exists V \in \mathcal{C}^\omega(U)$ *f.i.i,* $V(\mathbf{0}) \neq 0$ *(Reeb 52)*
3) $\exists \mathbf{G} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \cdots \in \mathcal{C}^\omega(U)$, $\exists \mu \in \mathcal{C}^\omega(U)$, *tal que* $[\mathbf{F}, \mathbf{G}] = \mu \mathbf{F}$. *(Algaba, Freire y Gamero 2000).*
4) $\mathbf{F}$ *es reversible, (existe un cambio formal de variables que lo transforma en* R_x*-reversible, invariante a* $(x, y, t) \to (-x, y, -t)$*)*

Forma normal del centro no degenerado

Teorema

La forma normal de $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \mathbf{F}(x,y) := \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} + \cdots$ *es* $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \mathbf{G}(x,y)$ *donde*

- $\mathbf{G} = (1 + g(h))\mathbf{X}_h + f(h)\mathbf{D}_0$, *(bajo conjugación)*
- $\mathbf{G} = \mathbf{X}_h + f(h)\mathbf{D}_0$, *(bajo equivalencia)*

donde $h(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2}$, $\mathbf{D}_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *y* $f(h), g(h)$ *son series formales en función de* h *con* $f(0) = g(0) = 0$.

Teorema

Sea **F** *no degenerado.*
F *tiene un centro en* $O \Leftrightarrow$ **F** *es integrable formalmente*

Demostración: Sea $\mathbf{G} = \mathbf{X}_h + f(h)\mathbf{D}_0$, la forma normal $\mathcal{C}^\infty$-equivalente de **F**. Considero la rotación de **G** sobre $\mathbf{X}_h$ es decir

$$\mathbf{G} \wedge \mathbf{X}_h = f(h)\mathbf{D}_0 \wedge \mathbf{X}_h = (r + |\mathbf{t}|)f(h)h \geq 0(\leq 0)$$

es cero si $f(h) \equiv 0$.

$$\mathbf{G} \text{ tiene un centro en O} \Leftrightarrow f(h) \equiv 0$$

■

Problema de cómputo de centros no degenerados

Todos estos resultados nos permiten construir un algoritmo para el cálculo de centros no degenerados en familias polinomiales.

Si **F** es polinomial, La condición de centro es solución algebraica (Nº finito de pasos). (Teorema de la base de Hilbert)

Cálculo de la aplicación de Poincaré $\Pi \in \mathcal{C}^{\omega}$ (es analítica)

Algoritmo de Poincaré-Lyapunov

Sea $I = h + \sum_{j>2} I_j, \quad I_j \in \mathcal{P}_j^{(1,1)}$, $\mathbf{F} = \mathbf{X}_h + \sum_{j>0} \mathbf{F}_j$

$$(\nabla I \cdot \mathbf{F})_k \quad = \quad \nabla I_k \cdot \mathbf{X}_h + \sum_{j=2}^{k-1} \nabla I_j \cdot \mathbf{F}_{k-j} = \ell_k\left(I_k\right) + \sum_{j=2}^{k-1} \nabla I_j \cdot \mathbf{F}_{k-j}$$

Considerando los operadores

$$\begin{array}{rcl} \ell_k & : & \mathcal{P}_k^{\mathbf{t}} \longrightarrow \mathcal{P}_k^{\mathbf{t}} \\ & & \mu_k \to \nabla \mu_k \cdot \mathbf{X}_h. \end{array}$$

Sus corrangos son:

$$\mathrm{Cor}\left(\ell_{2j}\right) = < h^j >$$

Se puede expresar

$$\nabla I \cdot \mathbf{F} \quad = \quad a_k h^k + \cdots .$$

$$\begin{cases} \text{Si } a_k \neq 0 & \mapsto \quad \text{O es foco} \\ \text{Si } a_k = 0 & \mapsto \quad \nabla I \cdot \mathbf{F} = a_{k+1} h^{k+1} + \cdots \end{cases}$$

Familias con centro no degenerado

Centros cuadráticos (Dulac, Kapteyn y Zoladek)

Calculan los centros del sistema $\dot{z} = iz + Az^2 + Bz\bar{z} + C\bar{z}^2$, $z, A, B, C \in \mathbb{C}$

Centros cúbicos simétricos (Sibirskii y Zoladek)

Calculan los centros del sistema
$\dot{z} = iz + Az^3 + Bz^2\bar{z} + Cz\bar{z}^2 + D\bar{z}^3$, $z, A, B, C, D \in \mathbb{C}$

Problema abierto

No se conocen los centros de la familia (cúbicos)
$\dot{z} = iz + Az^2 + Bz\bar{z} + C\bar{z}^2 + Dz^3 + Ez^2\bar{z} + Fz\bar{z}^2 + G\bar{z}^3$,
$z, A, B, C, D, E, F, G \in \mathbb{C}$

Campos nilpotentes monodrómicos

Proposición (Preforma normal)

Sea $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ *nilpotente, i.e.,* $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots$. *Existe un cambio de variables que lo lleva a* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{G}(\mathbf{x})$ *donde* $\mathbf{G}$

- $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} y \\ x^{2n} \end{pmatrix} + \cdots$, $\mathbf{t} = (2, 2n+1)$
- $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} y + dx^{n+1} \\ \sigma x^{2n+1} + (n+1)dx^2 y \end{pmatrix} + \cdots$, $\mathbf{t} = (1, n+1)$, $\sigma \in \{-1, 0, 1\}$, $d \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 + d^2 \neq 0$

Proposición (Campos nilpotentes monodrómicos (Andreev))

Si $\mathbf{F}$ *es nilpotente y monodrómico. Entonces* $\mathbf{F}$ *es* $\mathcal{C}^\infty$*-conjugado a* $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} y + dx^{n+1} \\ -x^{2n+1} + (n+1)dx^2 y \end{pmatrix} + \cdots$, $d \in \mathbb{R}$

Caracterizacion de los centros nilpotentes

Ninguna de las propiedades que caracterizan los centros no degenerados sirven para los centros nilpotentes

F centro no degenerado en O $\Leftrightarrow \exists\, I \in \mathcal{C}^{\omega}$, $\nabla I \cdot \mathbf{F} = 0$

$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} y \\ -x^3 \end{pmatrix} + x^5 \begin{pmatrix} x \\ 2y \end{pmatrix}$ es monodrómico y R_x-reversible (invariante a $(x, y, t) \to (-x, y, -t)$), por tanto centro, pero no es formalmente integrable ya que no es posible llevarlo a un campo hamiltoniano.

Teorema (Algaba, Gamero, García, Nonlinearity 2009)

Sea $\mathbf{F} = \mathbf{X}_h + \nu \mathbf{D}_0$ *con* $\mathbf{X}_h \in \mathcal{Q}_r^{\mathbf{t}}$, $\nu \in \bigoplus_{j>n} \mathrm{Cor}\left(\ell_j\right)$, *y todos los factores de h sobre* $C[x, y]$ *son simples.*

$\mathbf{F}$ *es formalmente integrable* $\Leftrightarrow \nu \equiv 0$.

contraejemplo

F centro no degenerado en O $\Leftrightarrow \exists\ V$, f.i.i. $V(\mathbf{0}) \neq 0$.
F centro no degenerado en O $\Leftrightarrow \exists\ G, \mu$, $[\mathbf{F}, \mathbf{G}] = \mu \mathbf{F}$ (**Simetria de Lie**),

$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} y \\ -x^5 \end{pmatrix} + x^3 \begin{pmatrix} x \\ 3y \end{pmatrix}$ es monodromico y R_x-reversible, por tanto centro, pero no existe un f.i.i. formal ni una simetría de Lie formal para este campo vectorial.
(Algaba, García, Reyes, Chaos, Solitón & Fractal 2012)

Caracterizacion de los centros nilpotentes

F centro no degenerado en O $\Leftrightarrow$ F es reversible, (contraejemplo)

$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} y \\ -x^5 \end{pmatrix} + (a_1 y + a_2 x^3) \begin{pmatrix} x \\ 3y \end{pmatrix}$, $\forall a_1, a_2$ es centro y si $a_1 a_2 \neq 0$ NO es reversible. (No existe un cambio de variables que lo lleve a R_x o R_y-reversible, únicas involuciones lineales de la parte principal).

Proposición (Centros semicuasihomogéneos)

Sea $\mathbf{F} = \mathbf{X}_h + \mu_k \mathbf{D}_0$, $\mathbf{X}_h$ *monodromico*, $\mu_k \in \mathcal{P}_k^{\mathbf{t}}$.
O es un centro de $\mathbf{F} \Leftrightarrow \int_{h=\mathrm{cte}} \mu_k = 0$

Forma normal del centro nilpotente

Teorema (Forma normal bajo equivalencia)

La forma normal de $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \mathbf{F}(x, y) := \mathbf{F}_n + \cdots,$

$\mathbf{F}_n = \begin{pmatrix} y + dx^{n+1} \\ -x^{2n+1} + (n+1)dx^n y \end{pmatrix}$, *es*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \mathbf{F}_n + \mu(x, h)\mathbf{D}_0,$$

donde $h(x, y) = -\frac{x^{2n+2}+(n+1)y^2}{2n+2}$, $\mathbf{D}_0 = \begin{pmatrix} x \\ (n+1)y \end{pmatrix}$,

$\mu = \sum_{i=n+1}^{2n} \alpha_i x^i + \sum_{i=0}^{2n} x^i h f_i(h)$, *$f_i$ son series formales en función de h con $f_i(0) = 0$.*

Caracterización de los centros nilpotentes

Teorema (Berthier y Moussu)

Sea **F** *un campo nilpotente y monodrómico.*
F *tiene centro en* $O \Leftrightarrow$ **F** *es formalmente orbitalmente reversible*

Demostración: La forma normal $\mathcal{C}^\infty$-equivalente es $\mathbf{G} = \mathbf{X}_h + \mu \mathbf{D}_0$, $\mathbf{X}_h = (y, -x^{2n+1})^T$. Considero $\mu = \mu_{par} + \mu_{impar}$ y $\mathbf{G}_{rever} = \mathbf{X}_h + \mu_{impar}\mathbf{D}_0$. $\mathbf{G}_{rever}$ es monodromico y R_x-reversible $\Rightarrow$ O es centro. Considero la rotación de **G** sobre $\mathbf{G}_{rever}$ es decir

$$\begin{aligned} \mathbf{G} \wedge \mathbf{G}_{rever} &= (\mathbf{G}_{rever} + \mu_{par}\mathbf{D}_0) \wedge \mathbf{G}_{rever} = \mu_{par}\left(\mathbf{D}_0 \wedge \mathbf{G}_{rever}\right) \\ &= (r + |\mathbf{t}|)\mu_{par} h \geq 0 \ (\leq 0) \end{aligned}$$

es cero en $x = 0$ (conjunto de medida nula).
O es centro de **F** $\Leftrightarrow \mu_{par} \equiv 0$ ■

Teorema (Gasull y Torregrosa (método de Cherkas))

El origen del sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x^{4q+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 xy + a_2 x^{2q+2} \\ b_1 y^2 + b_2 x^{2q+1} y + b_3 x^{4q+2} \end{pmatrix},$$

posee un centro en el origen en los siguientes casos:

a) $b_1 = -a_1,\ a_2 = 0,\ b_3 = a_1.$

b) $a_1 = b_1 = b_3 = 0$, *(reversible* $x \to -x,\ t \to -t$*).*

c) $a_2 = b_2 = 0$, *(reversible* $y \to -y,\ t \to -t$*).*

d) $a_1 + 2b_1 = 0,\ b_2 = -2(q+1)a_2.$

e) $a_2 = 0,\ b_3 = -\frac{1}{2}a_1,\ b_1 = \frac{2q+1}{2}a_1,\ a_1 b_2 \neq 0.$

f) $a_2 = 0,\ b_3 = -2a_1,\ b_1 = 2(q+1)a_1,\ a_1 b_2 \neq 0.$

Campos Degenerados Monodrómicos

- No es fácil caracterizar la monodromía de un campo con 2 o más caras en el polígono de Newton
- La aplicación de Poincaré de un campo monodrómico no es en general analítica ni siquiera suficientemente derivable.

$$\Pi(x) = V_1 x + o(x)$$

  $V_1 = 1$ es condición necesaria de centro.
  Algunos autores calculan V_1 para campos monodrómicos degenerados, (Medvedeva 1992), (Gasull, Llibre, Mañosa, Mañosas, Nonlinearity 2000).
- El problema de centro para campos polinomiales degenerados no es resoluble algebraicamente (Illyashenko) y (Zoladek, LLibre)

Ejemplo centro degenerado No orbital reversible

Resumen: Sea F no degenerado o nilpotente.

F tiene centro en O $\Leftrightarrow$ **F** es formalmente orbitalmente equivalente.

Proposición (Algaba, García, Giné JDE 2014)

El sistema
$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^3 + 2ax^3y \\ -x^5 - 3ax^2y^2 \end{pmatrix} + (\alpha x^4 + \beta xy^2) \begin{pmatrix} 2x \\ 3y \end{pmatrix}$$
con $\alpha\beta \neq 0$, *no es ni orbital reversible ni* $\mathcal{C}^\omega$*-integrable. Sin embargo existen* $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *y un* $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $|a| < \frac{1}{\sqrt{6}}$ *tal que el origen del sistema es un centro*

Demostración

monodromía

O es monodrómico si h no tiene factores reales en $\mathbb{C}[x, y]$, i.e. si $|a| < \frac{1}{\sqrt{6}}$.

centro semicuasihomogéneo

O es centro si y sólo sí $\int_{h=\mathrm{cte}} \mu = \alpha G_1(a) + \beta G_2(a) = 0$, donde $G_1(a) = \int_{h=\mathrm{cte}} x^4$, $G_2(a) = \int_{h=\mathrm{cte}} xy^2$

Proposición (Cond. suf. de No orbital reversibilidad)

- *Existencia de una curva invariante $C(x, y) = h + \cdots$ con cofactor K*
- *Si **F** es simétrico existe otra curva invariante simétrica a $C(-x, y)$ con cofactor $-K(-x, y)$*
- *$C(x, y) = C(-x, y)$ por tanto $K(x, y) = -K(-x, y)$ lo cual da lugar a una contradicción.*

Campos degenerados más simples

Dado el desconocimiento del problema de centro para campos degenerados, estudiamos el problema para las familias más simples de campos vectoriales monodrómicos degenerados, campos con una única cara en su polígono de Newton

Proposición

Sea $\mathbf{F} = \mathbf{F}_r + \cdots$ monodrómico, 1 cara en D. Newton y $\mathbf{F}_r$ no contiene parámetros $\Rightarrow$ problema de centro es algebraicamente resoluble

Proposición (Forma normal)

Sea $\mathbf{F} = \mathbf{F}_r + \cdots$ con una única cara en su diagrama de Newton $\Rightarrow$ la forma normal de $\mathbf{F}$ bajo equivalencia es:

$$\mathbf{F}_r + \mathbf{X}_H + \mu \mathbf{D}_0, \; H \text{ polinomio}, \; \mu \text{ serie formal}$$

Ejemplos

estudiamos el problema de centro para las dos familias más simples de campos vectoriales monodrómicos degenerados con una cara en su polígono de Newton

- $\mathbf{F} = \mathbf{F}_2 + \cdots, \mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} -y^3 \\ x^3 \end{pmatrix} \in \mathcal{Q}_2^{\mathbf{t}}, \mathbf{t} = (1,1),\ H = 0.$
- $\mathbf{F} = \mathbf{F}_7 + \cdots, \mathbf{F}_7 = \begin{pmatrix} -y^3 \\ x^5 \end{pmatrix} \in \mathcal{Q}_7^{\mathbf{t}}, \mathbf{t} = (2,3),\ H \neq 0.$

Ya en el problema de la integrabilidad analítica estas dos familias tienen distintos comportamientos.

Integrabilidad de $(-y^3, x^3) + \cdots$

Teorema

Sea $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -y^3 \\ x^3 \end{pmatrix} + \cdots$.

$\mathbf{F}$ *es* $\mathcal{C}^\omega$*-integrable* $\Leftrightarrow$ *se cumple alguna de las siguientes condiciones*

- $\mathbf{F}$ *es formalmente equivalente a* $(-y^3, x^3)^T$.
- $\exists$ V *f.i.i. formal de* $\mathbf{F}$ *con* $V(\mathbf{0}) \neq 0$.
- $\exists$ $G = (x, y)^T + \cdots$, $\mu = 1 + \cdots$ *formales tal que* $[\mathbf{F}, \mathbf{G}] = \mu \mathbf{F}$.

Sin embargo el campo $\mathbf{F} = (-y^3, x^5)^T + \cdots$ ya no cumple, en general, ninguna de las propiedades anteriores.

Fábrica de centros

Existen algoritmos para construir centros degenerados:

- Centros integrables (son orbitalmente equivalentes a un centro Hamiltoniano)
- Centros orbitalmente equivalentes a un centro semicuasihomogéneo
- Centros orbitalmente reversibles (Incluye a todos los nilpotentes y no degenerados).

Conclusiones

- No se conoce ninguna caracterización de centro para la familia $(-y^3, x^3)^T + \cdots$
- No se han encontrado buenas coordenadas para estudiar el problema de centro ¿Existen?
- Se necesitan nuevas teorías para abordar el problema de centro.
- El problema de centro es un problema para el futuro.

Muchas gracias por vuestra atención