

# **Estabilidad global de sistemas dinámicos discretos unidimensionales y estructura de bifurcación degenerada para sistemas bimodales lineales a trozos**

**Juan Segura**

Universitat Pompeu Fabra

**Ddays 2021**

**Lleida, 8-10 de Septiembre de 2021**

# PROBLEMA I

## Estabilidad global de sistemas discretos unidimensionales

D. Franco, J. Perán y J. Segura. Global stability of discrete dynamical systems via exponent analysis: applications to harvesting population models. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 101:1–22, 2018.

D. Franco, J. Perán y J. Segura. Stability for one-dimensional discrete dynamical systems revisited. *Discrete and Continuous Dynamical Systems–B*, 25(2):635–650, 2020.

## Motivación

El objetivo es estudiar la **estabilidad global** de sistemas de la forma

$$x_{t+1} = x_t g(x_t), \quad (1)$$

donde

- $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g \in \mathcal{C}^1(a, b)$ ,  $0 \leq a < b \leq \infty$  (acotado o no acotado),
- $g'(x) < 0$  para todo  $x$  (dinámica compensatoria),
- $g(b) < 1 < g(a)$  ( $\exists!$  equilibrio positivo,  $x^*$ ).

# Motivación

El objetivo es estudiar la **estabilidad global** de sistemas de la forma

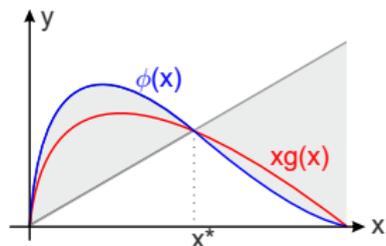
$$x_{t+1} = x_t g(x_t), \quad (1)$$

donde

- $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g \in \mathcal{C}^1(a, b)$ ,  $0 \leq a < b \leq \infty$  (acotado o no acotado),
- $g'(x) < 0$  para todo  $x$  (dinámica compensatoria),
- $g(b) < 1 < g(a)$  ( $\exists!$  equilibrio positivo,  $x^*$ ).

El método "*enveloping*" de P. Cull permite estudiar la estabilidad global de (1). Diremos que una función  $\phi(x)$  *envuelve* a  $xg(x)$  si

$$\begin{aligned} \phi(x) &> xg(x), & x < x^*, \\ \phi(x) &< xg(x), & x > x^*. \end{aligned}$$



*Corolario 2 en Cull, P. (2005)*

*Asumir, tras normalización si es necesario, que  $x^* = 1$ . Si existe  $\alpha \in [0, 1)$  tal que la función*

$$\phi_\alpha(x) = \frac{1 - \alpha x}{\alpha - (2\alpha - 1)x}$$

*envuelve a  $xg(x)$ , entonces  $x^* = 1$  es globalmente asintóticamente estable (G.A.S.) para (1).*

*Corolario 2 en Cull, P. (2005)*

*Asumir, tras normalización si es necesario, que  $x^* = 1$ . Si existe  $\alpha \in [0, 1)$  tal que la función*

$$\phi_\alpha(x) = \frac{1 - \alpha x}{\alpha - (2\alpha - 1)x}$$

*envuelve a  $xg(x)$ , entonces  $x^* = 1$  es globalmente asintóticamente estable (G.A.S.) para (1).*

**Problema:**  $\alpha$  se debe ajustar para cada sistema y en el caso de modelos puede cambiar con los parámetros.

## Motivación

E. Liz en 2007 obtuvo una condición alternativa que evita determinar  $\alpha$  para el caso de **dominio no acotado** ( $b = \infty$ ).

## Motivación

E. Liz en 2007 obtuvo una condición alternativa que evita determinar  $\alpha$  para el caso de **dominio no acotado** ( $b = \infty$ ). Mediante el cambio de variable  $y_t = \ln(x_t)$  estudió el sistema topológicamente conjugado

$$y_{t+1} = y_t + h(y_t), \quad (2)$$

donde  $h = \ln \circ g \circ \exp$  (notar que  $h' < 0$ ).

## Motivación

E. Liz en 2007 obtuvo una condición alternativa que evita determinar  $\alpha$  para el caso de **dominio no acotado** ( $b = \infty$ ). Mediante el cambio de variable  $y_t = \ln(x_t)$  estudió el sistema topológicamente conjugado

$$y_{t+1} = y_t + h(y_t), \quad (2)$$

donde  $h = \ln \circ g \circ \exp$  (notar que  $h' < 0$ ).

*Corolario 2.7 en Liz, E. (2007)*

Si  $h$  es  $C^3$  y tiene *derivada schwarziana negativa en todo su dominio*, i.e.,

$$3(h'')^2 > 2h'h''',$$

entonces la estabilidad local del equilibrio positivo de (1) implica su estabilidad global.

## ¿2-ciclos no triviales?

### *Proposición 1 (\*)*

*Asumir que  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua. Si  $x^*$  es un equilibrio de la ecuación  $x_{t+1} = f(x_t)$ , los siguientes enunciados son equivalentes:*

## ¿2-ciclos no triviales?

### Proposición 1 (\*)

Asumir que  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua. Si  $x^*$  es un equilibrio de la ecuación  $x_{t+1} = f(x_t)$ , los siguientes enunciados son equivalentes:

1.  $x^*$  es un atractor global.

## ¿2-ciclos no triviales?

### Proposición 1 (\*)

Asumir que  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua. Si  $x^*$  es un equilibrio de la ecuación  $x_{t+1} = f(x_t)$ , los siguientes enunciados son equivalentes:

1.  $x^*$  es un atractor global.
2.  $f^{(2)}(x) > x$  si  $x < x^*$  y  $f^{(2)}(x) < x$  si  $x > x^*$ .

## ¿2-ciclos no triviales?

### Proposición 1 (\*)

Asumir que  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua. Si  $x^*$  es un equilibrio de la ecuación  $x_{t+1} = f(x_t)$ , los siguientes enunciados son equivalentes:

1.  $x^*$  es un atractor global.
2.  $f^{(2)}(x) > x$  si  $x < x^*$  y  $f^{(2)}(x) < x$  si  $x > x^*$ .

\*Elaidy, S. "An introduction to difference equations", 3a. ed., Springer, New York, 2005.

## ¿2-ciclos no triviales?

*Proposición 1 (\*)*

Asumir que  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua. Si  $x^*$  es un equilibrio de la ecuación  $x_{t+1} = f(x_t)$ , los siguientes enunciados son equivalentes:

1.  $x^*$  es un atractor global.
2.  $f^{(2)}(x) > x$  si  $x < x^*$  y  $f^{(2)}(x) < x$  si  $x > x^*$ .

\*Elaidy, S. "An introduction to difference equations", 3a. ed., Springer, New York, 2005.

Aplicando este resultado a (2) obtuvimos una condición alternativa para la estabilidad global.

## ¿2-ciclos no triviales?

Asumir  $y < y^* = h^{-1}(0)$  y tomar  $u = h(y) > 0$ .

## ¿2-ciclos no triviales?

Asumir  $y < y^* = h^{-1}(0)$  y tomar  $u = h(y) > 0$ .

$$(\text{id} + h)^{(2)}(y) > y$$

## ¿2-ciclos no triviales?

Asumir  $y < y^* = h^{-1}(0)$  y tomar  $u = h(y) > 0$ .

$$(\text{id} + h)^{(2)}(y) > y \Leftrightarrow y + h(y) + h(y + h(y)) > y$$

## ¿2-ciclos no triviales?

Asumir  $y < y^* = h^{-1}(0)$  y tomar  $u = h(y) > 0$ .

$$\begin{aligned}(\text{id} + h)^{(2)}(y) > y &\Leftrightarrow y + h(y) + h(y + h(y)) > y \\ &\Leftrightarrow h(y + h(y)) > -h(y)\end{aligned}$$

## ¿2-ciclos no triviales?

Asumir  $y < y^* = h^{-1}(0)$  y tomar  $u = h(y) > 0$ .

$$\begin{aligned}(\text{id} + h)^{(2)}(y) > y &\Leftrightarrow y + h(y) + h(y + h(y)) > y \\ &\Leftrightarrow h(y + h(y)) > -h(y) \\ &\Leftrightarrow h^{-1}(u) + u > h^{-1}(-u)\end{aligned}$$

## ¿2-ciclos no triviales?

Asumir  $y < y^* = h^{-1}(0)$  y tomar  $u = h(y) > 0$ .

$$(\text{id} + h)^{(2)}(y) > y \Leftrightarrow y + h(y) + h(y + h(y)) > y$$

$$\Leftrightarrow h(y + h(y)) > -h(y)$$

$$\Leftrightarrow h^{-1}(u) + u > h^{-1}(-u)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{h^{-1}(-u) - h^{-1}(u)}{u}}_{\sigma(u)} > \mathbf{1}.$$

## ¿2-ciclos no triviales?

Asumir  $y < y^* = h^{-1}(0)$  y tomar  $u = h(y) > 0$ .

$$\begin{aligned}
 (\text{id} + h)^{(2)}(y) > y &\Leftrightarrow y + h(y) + h(y + h(y)) > y \\
 &\Leftrightarrow h(y + h(y)) > -h(y) \\
 &\Leftrightarrow h^{-1}(u) + u > h^{-1}(-u) \\
 &\Leftrightarrow \underbrace{\frac{h^{-1}(-u) - h^{-1}(u)}{u}}_{\sigma(u)} > \mathbf{1}.
 \end{aligned}$$

Igualmente,  $(\text{id} + h)^{(2)}(y) < y$  equivale para  $y > y^*$  a  $\sigma(u) > 1$ .

## ¿2-ciclos no triviales?

Asumir  $y < y^* = h^{-1}(0)$  y tomar  $u = h(y) > 0$ .

$$\begin{aligned}
 (\text{id} + h)^{(2)}(y) > y &\Leftrightarrow y + h(y) + h(y + h(y)) > y \\
 &\Leftrightarrow h(y + h(y)) > -h(y) \\
 &\Leftrightarrow h^{-1}(u) + u > h^{-1}(-u) \\
 &\Leftrightarrow \underbrace{\frac{h^{-1}(-u) - h^{-1}(u)}{u}}_{\sigma(u)} > \mathbf{1}.
 \end{aligned}$$

Igualmente,  $(\text{id} + h)^{(2)}(y) < y$  equivale para  $y > y^*$  a  $\sigma(u) > 1$ .

El término  $\sigma(u)$  está definido para  $u \in (-\zeta, \zeta) \setminus \{0\}$  con  $\zeta = \min\{-\inf h, \sup h\}$ , y podemos extenderlo por continuidad a  $u = 0$  tomando

$$\sigma(0) = \frac{-2}{h'(y^*)}.$$

Estabilidad según la gráfica de  $\sigma$ 

Definimos la función  $\sigma: (-\zeta, \zeta) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\sigma(u) = \begin{cases} \frac{h^{-1}(-u) - h^{-1}(u)}{u}, & u \neq 0, \\ \frac{-2}{h'(y^*)}, & u = 0. \end{cases}$$

Estabilidad según la gráfica de  $\sigma$ 

Definimos la función  $\sigma: (-\zeta, \zeta) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\sigma(u) = \begin{cases} \frac{h^{-1}(-u) - h^{-1}(u)}{u}, & u \neq 0, \\ \frac{-2}{h'(y^*)}, & u = 0. \end{cases}$$

Es fácil ver que esta función es positiva, par y

$$|(\text{id} + h)'(y^*)| < 1 \Leftrightarrow \sigma(0) > 1.$$

Estabilidad según la gráfica de  $\sigma$ 

Definimos la función  $\sigma: (-\zeta, \zeta) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\sigma(u) = \begin{cases} \frac{h^{-1}(-u) - h^{-1}(u)}{u}, & u \neq 0, \\ \frac{-2}{h'(y^*)}, & u = 0. \end{cases}$$

Es fácil ver que esta función es positiva, par y

$$|(\text{id} + h)'(y^*)| < 1 \Leftrightarrow \sigma(0) > 1.$$

### Teorema 2

a)  $y^*$  es L.A.S. si  $\sigma(0) > 1$ , e inestable si  $\sigma(0) < 1$ .

Estabilidad según la gráfica de  $\sigma$ 

Definimos la función  $\sigma: (-\zeta, \zeta) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\sigma(u) = \begin{cases} \frac{h^{-1}(-u) - h^{-1}(u)}{u}, & u \neq 0, \\ \frac{-2}{h'(y^*)}, & u = 0. \end{cases}$$

Es fácil ver que esta función es positiva, par y

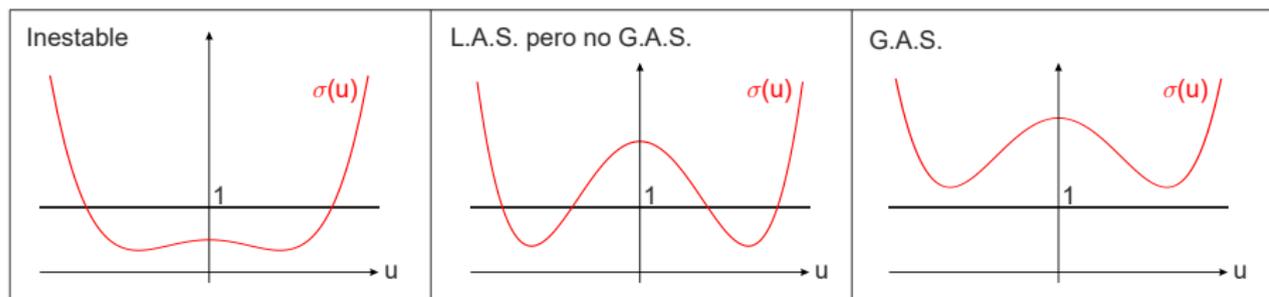
$$|(\text{id} + h)'(y^*)| < 1 \Leftrightarrow \sigma(0) > 1.$$

### Teorema 2

- a)  $y^*$  es L.A.S. si  $\sigma(0) > 1$ , e inestable si  $\sigma(0) < 1$ .
- b)  $y^*$  es **G.A.S.** si y solo si  $\sigma(u) > 1$  para todo  $u \neq 0$ .

Estabilidad según la gráfica de  $\sigma$ 

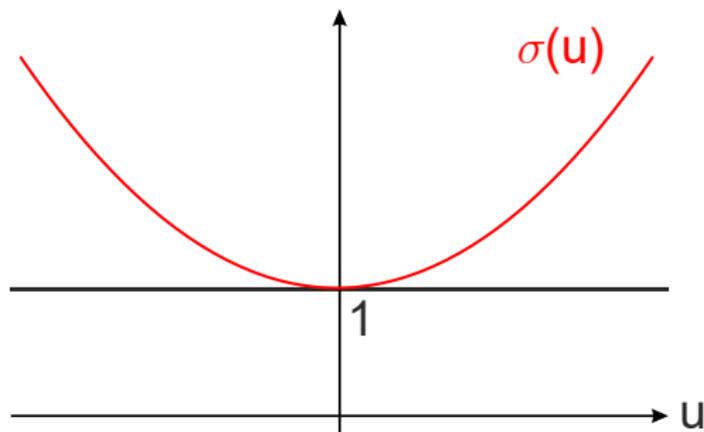
Algunos ejemplos:



## Condición suficiente de estabilidad global

Para garantizar que el equilibrio de (2) es G.A.S. basta con que

- $\sigma(0) \geq 1$ .
- $\sigma$  alcanza su mínimo absoluto en  $u = 0$ .



## Condición suficiente de estabilidad global

*Proposición 3*

*Si  $h \in \mathcal{C}^3(\text{dom } h)$ ,  $|(\text{id}+h)'(y^*)| \leq 1$  y  $(h^{-1})'$  es estrictamente cóncava en su dominio, entonces  $y^*$  es G.A.S.*

## Condición suficiente de estabilidad global

*Proposición 3*

Si  $h \in \mathcal{C}^3(\text{dom } h)$ ,  $|(\text{id}+h)'(y^*)| \leq 1$  y  $(h^{-1})'$  es estrictamente cóncava en su dominio, entonces  $y^*$  es G.A.S.

*Demostración:*

La condición  $|(\text{id} + h)'(y^*)| \leq 1$  equivale a  $\sigma(0) \geq 1$ .

## Condición suficiente de estabilidad global

*Proposición 3*

Si  $h \in \mathcal{C}^3(\text{dom } h)$ ,  $|(\text{id}+h)'(y^*)| \leq 1$  y  $(h^{-1})'$  es estrictamente cóncava en su dominio, entonces  $y^*$  es G.A.S.

*Demostración:*

La condición  $|(\text{id}+h)'(y^*)| \leq 1$  equivale a  $\sigma(0) \geq 1$ .

Consideremos  $\Psi(u) = u(\sigma(u) - \sigma(0)) = h^{-1}(-u) - h^{-1}(u) + \frac{2u}{h'(y^*)}$ .

## Condición suficiente de estabilidad global

*Proposición 3*

Si  $h \in \mathcal{C}^3(\text{dom } h)$ ,  $|(\text{id}+h)'(y^*)| \leq 1$  y  $(h^{-1})'$  es estrictamente cóncava en su dominio, entonces  $y^*$  es G.A.S.

*Demostración:*

La condición  $|(\text{id}+h)'(y^*)| \leq 1$  equivale a  $\sigma(0) \geq 1$ .

Consideremos  $\Psi(u) = u(\sigma(u) - \sigma(0)) = h^{-1}(-u) - h^{-1}(u) + \frac{2u}{h'(y^*)}$ .

- $\Psi'''(u) = -(h^{-1})'''(-u) - (h^{-1})'''(u) > 0 \forall u$ .

## Condición suficiente de estabilidad global

*Proposición 3*

Si  $h \in \mathcal{C}^3(\text{dom } h)$ ,  $|(\text{id}+h)'(y^*)| \leq 1$  y  $(h^{-1})'$  es estrictamente cóncava en su dominio, entonces  $y^*$  es G.A.S.

*Demostración:*

La condición  $|(\text{id}+h)'(y^*)| \leq 1$  equivale a  $\sigma(0) \geq 1$ .

Consideremos  $\Psi(u) = u(\sigma(u) - \sigma(0)) = h^{-1}(-u) - h^{-1}(u) + \frac{2u}{h'(y^*)}$ .

- $\Psi'''(u) = -(h^{-1})'''(-u) - (h^{-1})'''(u) > 0 \forall u$ .
- $\Psi''(0) = 0 \Rightarrow \Psi''(u) \cdot u > 0 \forall u \neq 0$ ,

## Condición suficiente de estabilidad global

*Proposición 3*

Si  $h \in \mathcal{C}^3(\text{dom } h)$ ,  $|(\text{id}+h)'(y^*)| \leq 1$  y  $(h^{-1})'$  es estrictamente cóncava en su dominio, entonces  $y^*$  es G.A.S.

*Demostración:*

La condición  $|(\text{id}+h)'(y^*)| \leq 1$  equivale a  $\sigma(0) \geq 1$ .

Consideremos  $\Psi(u) = u(\sigma(u) - \sigma(0)) = h^{-1}(-u) - h^{-1}(u) + \frac{2u}{h'(y^*)}$ .

- $\Psi'''(u) = -(h^{-1})'''(-u) - (h^{-1})'''(u) > 0 \forall u$ .
- $\Psi''(0) = 0 \Rightarrow \Psi''(u) \cdot u > 0 \forall u \neq 0$ ,
- $\Psi'(0) = 0 \Rightarrow \Psi'(u) > 0 \forall u \neq 0$ ,

## Condición suficiente de estabilidad global

*Proposición 3*

Si  $h \in \mathcal{C}^3(\text{dom } h)$ ,  $|(\text{id}+h)'(y^*)| \leq 1$  y  $(h^{-1})'$  es estrictamente cóncava en su dominio, entonces  $y^*$  es G.A.S.

*Demostración:*

La condición  $|(\text{id}+h)'(y^*)| \leq 1$  equivale a  $\sigma(0) \geq 1$ .

Consideremos  $\Psi(u) = u(\sigma(u) - \sigma(0)) = h^{-1}(-u) - h^{-1}(u) + \frac{2u}{h'(y^*)}$ .

- $\Psi'''(u) = -(h^{-1})'''(-u) - (h^{-1})'''(u) > 0 \forall u$ .
- $\Psi''(0) = 0 \Rightarrow \Psi''(u) \cdot u > 0 \forall u \neq 0$ ,
- $\Psi'(0) = 0 \Rightarrow \Psi'(u) > 0 \forall u \neq 0$ ,
- $\Psi(0) = 0 \Rightarrow \Psi(u) \cdot u > 0 \forall u \neq 0$ .

## Condición suficiente de estabilidad global

*Proposición 3*

Si  $h \in \mathcal{C}^3(\text{dom } h)$ ,  $|(\text{id}+h)'(y^*)| \leq 1$  y  $(h^{-1})'$  es estrictamente cóncava en su dominio, entonces  $y^*$  es G.A.S.

*Demostración:*

La condición  $|(\text{id}+h)'(y^*)| \leq 1$  equivale a  $\sigma(0) \geq 1$ .

Consideremos  $\Psi(u) = u(\sigma(u) - \sigma(0)) = h^{-1}(-u) - h^{-1}(u) + \frac{2u}{h'(y^*)}$ .

- $\Psi'''(u) = -(h^{-1})'''(-u) - (h^{-1})'''(u) > 0 \forall u$ .
- $\Psi''(0) = 0 \Rightarrow \Psi''(u) \cdot u > 0 \forall u \neq 0$ ,
- $\Psi'(0) = 0 \Rightarrow \Psi'(u) > 0 \forall u \neq 0$ ,
- $\Psi(0) = 0 \Rightarrow \Psi(u) \cdot u > 0 \forall u \neq 0$ .

Así,  $\sigma(u) > \sigma(0) \geq 1 \forall u \neq 0$ , con lo que se concluye aplicando el Teorema 2. ■

## Condición suficiente de estabilidad global

Para  $h \in \mathcal{C}^3(\text{dom } h)$  es

$$(h^{-1})'''(u) = \frac{3(h''(y))^2 - h'(y)h'''(y)}{(h'(y))^5}.$$

## Condición suficiente de estabilidad global

Para  $h \in \mathcal{C}^3(\text{dom } h)$  es

$$(h^{-1})'''(u) = \frac{3(h''(y))^2 - h'(y)h'''(y)}{(h'(y))^5}.$$

### Corolario 4

*Para  $h \in \mathcal{C}^3(\text{dom } h)$ , si  $3(h'')^2 > h'h'''$  entonces la estabilidad local del equilibrio de (1) implica su estabilidad global.*

## Condición suficiente de estabilidad global

Para  $h \in \mathcal{C}^3(\text{dom } h)$  es

$$(h^{-1})'''(u) = \frac{3(h''(y))^2 - h'(y)h'''(y)}{(h'(y))^5}.$$

### Corolario 4

Para  $h \in \mathcal{C}^3(\text{dom } h)$ , si  $3(h'')^2 > h'h'''$  entonces la estabilidad local del equilibrio de (1) implica su estabilidad global.

Esta condición es:

- Estrictamente más débil que la de derivada schwarziana negativa,  $3(h'')^2 > 2h'h'''$ .

## Condición suficiente de estabilidad global

Para  $h \in \mathcal{C}^3(\text{dom } h)$  es

$$(h^{-1})'''(u) = \frac{3(h''(y))^2 - h'(y)h'''(y)}{(h'(y))^5}.$$

### Corolario 4

Para  $h \in \mathcal{C}^3(\text{dom } h)$ , si  $3(h'')^2 > h'h'''$  entonces la estabilidad local del equilibrio de (1) implica su estabilidad global.

Esta condición es:

- Estrictamente más débil que la de derivada schwarziana negativa,  $3(h'')^2 > 2h'h'''$ .
- Aplicable a sistemas con dominios acotados y no acotados.

## Aplicación: estabilidad global y momento de intervención

Población no controlada

$$x_{t+1} = x_t g(x_t)$$

## Aplicación: estabilidad global y momento de intervención

### Población no controlada

$$x_{t+1} = x_t g(x_t)$$

- $\exists!$  equilibrio positivo,

## Aplicación: estabilidad global y momento de intervención

### Población no controlada

$$x_{t+1} = x_t g(x_t)$$

- $\exists!$  equilibrio positivo,
- acumula energía para reproducción durante una estación.

## Aplicación: estabilidad global y momento de intervención

Población no controlada

$$x_{t+1} = x_t g(x_t)$$

- $\exists!$  equilibrio positivo,
- acumula energía para reproducción durante una estación.

Población controlada (Seno, 2008)

$$x_{t+1} = \theta u x_t g(x_t) + (1 - \theta) u x_t g(u x_t).$$

## Aplicación: estabilidad global y momento de intervención

Población no controlada

$$x_{t+1} = x_t g(x_t)$$

- $\exists!$  equilibrio positivo,
- acumula energía para reproducción durante una estación.

Población controlada (Seno, 2008)

$$x_{t+1} = \theta u x_t g(x_t) + (1 - \theta) u x_t g(u x_t).$$

$u \rightarrow$  % población que persiste

## Aplicación: estabilidad global y momento de intervención

Población no controlada

$$x_{t+1} = x_t g(x_t)$$

- $\exists!$  equilibrio positivo,
- acumula energía para reproducción durante una estación.

Población controlada (Seno, 2008)

$$x_{t+1} = \theta u x_t g(x_t) + (1 - \theta) u x_t g(u x_t).$$

- $u \rightarrow$  % población que persiste
- $\theta \rightarrow$  momento de intervención
  - $\theta = 0 \rightarrow$  inicio estación
  - $\theta = 1 \rightarrow$  final estación

## Aplicación: estabilidad global y momento de intervención

Población no controlada

$$x_{t+1} = x_t g(x_t)$$

- $\exists!$  equilibrio positivo,
- acumula energía para reproducción durante una estación.

Población controlada (Seno, 2008)

$$x_{t+1} = \theta u x_t g(x_t) + (1 - \theta) u x_t g(u x_t).$$

- $u \rightarrow$  % población que persiste
- $\theta \rightarrow$  momento de intervención
  - $\theta = 0 \rightarrow$  inicio estación
  - $\theta = 1 \rightarrow$  final estación

¿G.A.S. para  $\theta = 0 \Rightarrow$  G.A.S. para  $\theta \in (0, 1)$ ?

## Aplicación: estabilidad global y momento de intervención

Población no controlada

$$x_{t+1} = x_t g(x_t)$$

- $\exists!$  equilibrio positivo,
- acumula energía para reproducción durante una estación.

Población controlada (Seno, 2008)

$$x_{t+1} = \theta u x_t g(x_t) + (1 - \theta) u x_t g(u x_t).$$

- $u \rightarrow$  % población que persiste
- $\theta \rightarrow$  momento de intervención
- $\theta = 0 \rightarrow$  inicio estación
- $\theta = 1 \rightarrow$  final estación

¿G.A.S. para  $\theta = 0 \Rightarrow$  G.A.S. para  $\theta \in (0, 1)$ ?

Cid *et al.* (2014) lo probaron para Beverton-Holt y cuadrática, y Franco *et al.* (2018) para Ricker.

## Aplicación: estabilidad global y momento de intervención

Población no controlada

$$x_{t+1} = x_t g(x_t)$$

- $\exists!$  equilibrio positivo,
- acumula energía para reproducción durante una estación.

Población controlada (Seno, 2008)

$$x_{t+1} = \theta u x_t g(x_t) + (1 - \theta) u x_t g(u x_t).$$

- $u \rightarrow$  % población que persiste
- $\theta \rightarrow$  momento de intervención
- $\theta = 0 \rightarrow$  inicio estación
- $\theta = 1 \rightarrow$  final estación

¿G.A.S. para  $\theta = 0 \Rightarrow$  G.A.S. para  $\theta \in (0, 1)$ ?

Cid *et al.* (2014) lo probaron para Beverton-Holt y cuadrática, y Franco *et al.* (2018) para Ricker.

**¿Y para otros modelos?**

# Aplicación: estabilidad global y momento de intervención

Otros modelos se obtienen introduciendo un **exponente  $\alpha$** :

<p>Cuadrática</p> $g(x) = \kappa(1 - x)$	<p>Discretización de Richards</p> $g(x) = \kappa(1 - x^\alpha)$
<p>Beverton-Holt</p> $g(x) = \frac{\kappa}{1 + x}$	<p>Maynard-Smith-Slatkin</p> $g(x) = \frac{\kappa}{1 + x^\alpha}$
<p>Ricker</p> $g(x) = \kappa e^{-x}$	<p>Bellows</p> $g(x) = \kappa e^{-x^\alpha}$
<p>Hassell</p> $g(x) = \frac{\kappa}{(1 + x)^\beta}$	<p>Thieme</p> $g(x) = \frac{\kappa}{(1 + x^\alpha)^\beta}$

## Aplicación: estabilidad global y momento de intervención

Para los modelos que incluyen  $\alpha$ , la ecuación de Seno se corresponde con

$$x_{t+1} = x_t (c g(x_t^\alpha) + (b - c)g(sx_t^\alpha)), \quad (3)$$

para  $b = u$ ,  $c = \theta u$  y  $s = u^\alpha$ .

## Aplicación: estabilidad global y momento de intervención

Para los modelos que incluyen  $\alpha$ , la ecuación de Seno se corresponde con

$$x_{t+1} = x_t (c g(x_t^\alpha) + (b - c)g(sx_t^\alpha)), \quad (3)$$

para  $b = u$ ,  $c = \theta u$  y  $s = u^\alpha$ .

Aplicando las mismas ideas expuestas anteriormente, llegamos al siguiente resultado:

## Aplicación: estabilidad global y momento de intervención

Para los modelos que incluyen  $\alpha$ , la ecuación de Seno se corresponde con

$$x_{t+1} = x_t (c g(x_t^\alpha) + (b - c)g(sx_t^\alpha)), \quad (3)$$

para  $b = u$ ,  $c = \theta u$  y  $s = u^\alpha$ .

Aplicando las mismas ideas expuestas anteriormente, llegamos al siguiente resultado:

### Teorema 5

El equilibrio positivo de (3) es **G.A.S.** si y solo si  $\sigma(z) > \alpha$  para todo  $z$ .

# Aplicación: estabilidad global y momento de intervención

Modelo	$\exists!$ equilibrio pos.	Condición G.A.S.
Bellows, $g(x) = \kappa e^{-x^\alpha}$	$\kappa U > 1$	$\alpha \leq 2 / \ln(\kappa U)$
Disc. Richards, $g(x) = \kappa(1 - x^\alpha)$	$\kappa U > 1, \alpha \kappa < (1 + \alpha)^{\frac{1+\alpha}{\alpha}}$	$\kappa U(\alpha - 2) \leq \alpha$
Maynard-Smith, $g(x) = \frac{\kappa}{1 + x^\alpha}$	$\kappa U > 1$	$\kappa U(\alpha - 2) \leq \alpha$
Thieme, $g(x) = \frac{\kappa}{(1 + x^\alpha)^\beta}$	$\kappa U > 1$	$(\kappa U)^{1/\beta}(\alpha\beta - 2) \leq \alpha\beta$

# PROBLEMA II

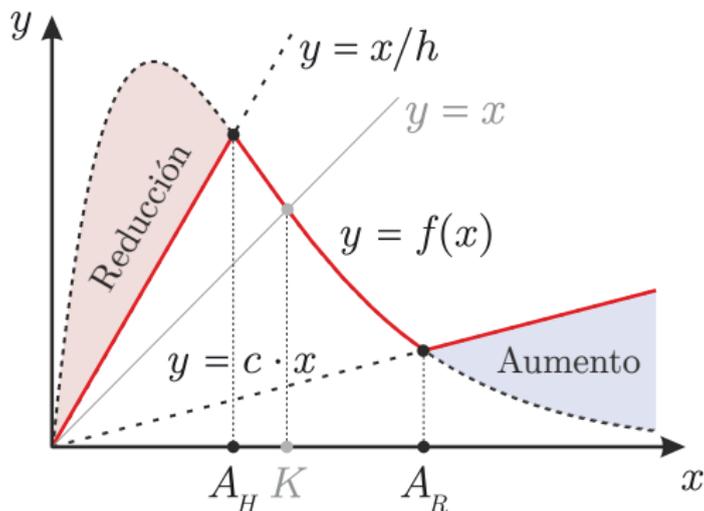
## Estructura de bifurcación degenerada para sistemas bimodales lineales a trozos

J. Segura, F. Hilker y D. Franco. Degenerate period adding bifurcation structure of one-dimensional bimodal piecewise linear maps. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 80:3, 1356–1376, 2020.

# Control límite adaptativo combinado (CALC)

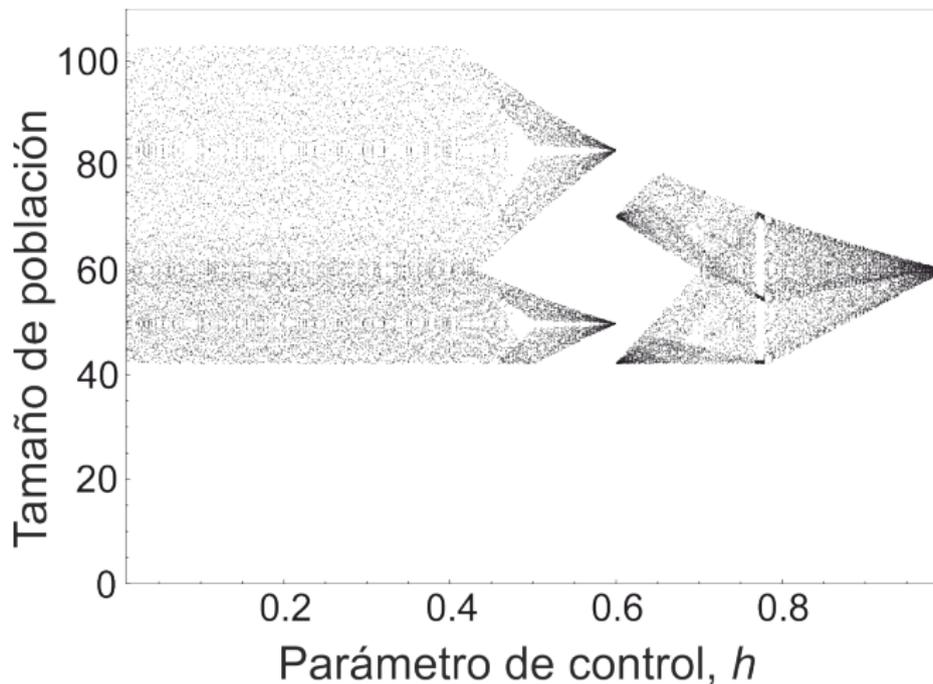
Segura, Hilker & Franco (2019)

$$x_{t+1} = \max\{\min\{f(x_t), x_t/h\}, c \cdot x_t\}$$



## Motivation

El análisis de las propiedades estabilizadoras de CALC mostró **transiciones abruptas** entre diferentes atractores:



## Motivación

CALC

$$F(x) = \begin{cases} (1/h)x, & 0 \leq x \leq A_H, \\ f(x), & A_H < x < A_R, \\ cx, & x \geq A_R. \end{cases}$$

Lineales a trozos (PWL) bimodales

$$F(x) = \begin{cases} a_{\mathcal{L}}x + \mu_{\mathcal{L}}, & 0 \leq x \leq d_{\mathcal{L}}, \\ a_{\mathcal{M}}x + \mu_{\mathcal{M}}, & d_{\mathcal{L}} < x < d_{\mathcal{R}}, \\ a_{\mathcal{R}}x + \mu_{\mathcal{R}}. & x \geq d_{\mathcal{R}}, \end{cases}$$

## Motivación

CALC

$$F(x) = \begin{cases} (1/h)x, & 0 \leq x \leq A_H, \\ f(x), & A_H < x < A_R, \\ cx, & x \geq A_R. \end{cases}$$

Lineales a trozos (PWL) bimodales

$$F(x) = \begin{cases} a_{\mathcal{L}}x + \mu_{\mathcal{L}}, & 0 \leq x \leq d_{\mathcal{L}}, \\ a_{\mathcal{M}}x + \mu_{\mathcal{M}}, & d_{\mathcal{L}} < x < d_{\mathcal{R}}, \\ a_{\mathcal{R}}x + \mu_{\mathcal{R}}, & x \geq d_{\mathcal{R}}, \end{cases}$$

CALC y las funciones PWL bimodales coinciden en las ramas externas y para

$$\mu_{\mathcal{L}} = \mu_{\mathcal{R}} = 0.$$

## Motivación

CALC

$$F(x) = \begin{cases} (1/h)x, & 0 \leq x \leq A_H, \\ f(x), & A_H < x < A_R, \\ cx, & x \geq A_R. \end{cases}$$

Lineales a trozos (PWL) bimodales

$$F(x) = \begin{cases} a_{\mathcal{L}}x + \mu_{\mathcal{L}}, & 0 \leq x \leq d_{\mathcal{L}}, \\ a_{\mathcal{M}}x + \mu_{\mathcal{M}}, & d_{\mathcal{L}} < x < d_{\mathcal{R}}, \\ a_{\mathcal{R}}x + \mu_{\mathcal{R}}, & x \geq d_{\mathcal{R}}, \end{cases}$$

CALC y las funciones PWL bimodales coinciden en las ramas externas y para

$$\mu_{\mathcal{L}} = \mu_{\mathcal{R}} = 0.$$

**Cuestión:**

Estudiar bifurcaciones de funciones PWL bimodales

## Motivación

CALC

$$F(x) = \begin{cases} (1/h)x, & 0 \leq x \leq A_H, \\ f(x), & A_H < x < A_R, \\ cx, & x \geq A_R. \end{cases}$$

Lineales a trozos (PWL) bimodales

$$F(x) = \begin{cases} a_{\mathcal{L}}x + \mu_{\mathcal{L}}, & 0 \leq x \leq d_{\mathcal{L}}, \\ a_{\mathcal{M}}x + \mu_{\mathcal{M}}, & d_{\mathcal{L}} < x < d_{\mathcal{R}}, \\ a_{\mathcal{R}}x + \mu_{\mathcal{R}}, & x \geq d_{\mathcal{R}}, \end{cases}$$

CALC y las funciones PWL bimodales coinciden en las ramas externas y para

$$\mu_{\mathcal{L}} = \mu_{\mathcal{R}} = 0.$$

**Cuestión:**

Estudiar bifurcaciones de funciones PWL bimodales

1. bajo la restricción  $\mu_{\mathcal{L}} = \mu_{\mathcal{R}} = 0$ ,

## Motivación

CALC

$$F(x) = \begin{cases} (1/h)x, & 0 \leq x \leq A_H, \\ f(x), & A_H < x < A_R, \\ cx, & x \geq A_R. \end{cases}$$

Lineales a trozos (PWL) bimodales

$$F(x) = \begin{cases} a_{\mathcal{L}}x + \mu_{\mathcal{L}}, & 0 \leq x \leq d_{\mathcal{L}}, \\ a_{\mathcal{M}}x + \mu_{\mathcal{M}}, & d_{\mathcal{L}} < x < d_{\mathcal{R}}, \\ a_{\mathcal{R}}x + \mu_{\mathcal{R}}, & x \geq d_{\mathcal{R}}, \end{cases}$$

CALC y las funciones PWL bimodales coinciden en las ramas externas y para

$$\mu_{\mathcal{L}} = \mu_{\mathcal{R}} = 0.$$

**Cuestión:**

Estudiar bifurcaciones de funciones PWL bimodales

1. bajo la restricción  $\mu_{\mathcal{L}} = \mu_{\mathcal{R}} = 0$ ,
2. afectando las ramas externas.

## Estructuras de bifurcación para funciones PWL bimodales

$$F(x) = \begin{cases} a_{\mathcal{L}}x + \mu_{\mathcal{L}}, & 0 \leq x \leq d_{\mathcal{L}}, \\ a_{\mathcal{M}}x + \mu_{\mathcal{M}}, & d_{\mathcal{L}} < x < d_{\mathcal{R}}, \\ a_{\mathcal{R}}x + \mu_{\mathcal{R}}, & x \geq d_{\mathcal{R}}, \end{cases} \quad \begin{aligned} I_{\mathcal{L}} &= [0, d_{\mathcal{L}}], \\ I_{\mathcal{M}} &= (d_{\mathcal{L}}, d_{\mathcal{R}}), \\ I_{\mathcal{R}} &= [d_{\mathcal{R}}, +\infty). \end{aligned}$$

## Estructuras de bifurcación para funciones PWL bimodales

$$F(x) = \begin{cases} a_{\mathcal{L}}x + \mu_{\mathcal{L}}, & 0 \leq x \leq d_{\mathcal{L}}, \\ a_{\mathcal{M}}x + \mu_{\mathcal{M}}, & d_{\mathcal{L}} < x < d_{\mathcal{R}}, \\ a_{\mathcal{R}}x + \mu_{\mathcal{R}}, & x \geq d_{\mathcal{R}}, \end{cases} \quad \begin{aligned} I_{\mathcal{L}} &= [0, d_{\mathcal{L}}], \\ I_{\mathcal{M}} &= (d_{\mathcal{L}}, d_{\mathcal{R}}), \\ I_{\mathcal{R}} &= [d_{\mathcal{R}}, +\infty). \end{aligned}$$

Conforme varían los parámetros, **bifurcaciones de colisión en el borde (BCB)** ocurren cuando órbitas periódicas colisionan con  $d_{\mathcal{L}}$  o  $d_{\mathcal{R}}$ .

## Estructuras de bifurcación para funciones PWL bimodales

$$F(x) = \begin{cases} a_{\mathcal{L}}x + \mu_{\mathcal{L}}, & 0 \leq x \leq d_{\mathcal{L}}, \\ a_{\mathcal{M}}x + \mu_{\mathcal{M}}, & d_{\mathcal{L}} < x < d_{\mathcal{R}}, \\ a_{\mathcal{R}}x + \mu_{\mathcal{R}}, & x \geq d_{\mathcal{R}}, \end{cases} \quad \begin{aligned} I_{\mathcal{L}} &= [0, d_{\mathcal{L}}], \\ I_{\mathcal{M}} &= (d_{\mathcal{L}}, d_{\mathcal{R}}), \\ I_{\mathcal{R}} &= [d_{\mathcal{R}}, +\infty). \end{aligned}$$

Conforme varían los parámetros, **bifurcaciones de colisión en el borde (BCB)** ocurren cuando órbitas periódicas colisionan con  $d_{\mathcal{L}}$  o  $d_{\mathcal{R}}$ .

Dependiendo de la posición de estos ciclos se obtienen diferentes estructuras de bifurcación:

## Estructuras de bifurcación para funciones PWL bimodales

$$F(x) = \begin{cases} a_{\mathcal{L}}x + \mu_{\mathcal{L}}, & 0 \leq x \leq d_{\mathcal{L}}, \\ a_{\mathcal{M}}x + \mu_{\mathcal{M}}, & d_{\mathcal{L}} < x < d_{\mathcal{R}}, \\ a_{\mathcal{R}}x + \mu_{\mathcal{R}}, & x \geq d_{\mathcal{R}}, \end{cases} \quad \begin{aligned} I_{\mathcal{L}} &= [0, d_{\mathcal{L}}], \\ I_{\mathcal{M}} &= (d_{\mathcal{L}}, d_{\mathcal{R}}), \\ I_{\mathcal{R}} &= [d_{\mathcal{R}}, +\infty). \end{aligned}$$

Conforme varían los parámetros, **bifurcaciones de colisión en el borde (BCB)** ocurren cuando órbitas periódicas colisionan con  $d_{\mathcal{L}}$  o  $d_{\mathcal{R}}$ .

Dependiendo de la posición de estos ciclos se obtienen diferentes estructuras de bifurcación:

- **Estructura “Fin”**: las tres componentes del dominio contienen puntos de los ciclos.

## Estructuras de bifurcación para funciones PWL bimodales

$$F(x) = \begin{cases} a_{\mathcal{L}}x + \mu_{\mathcal{L}}, & 0 \leq x \leq d_{\mathcal{L}}, \\ a_{\mathcal{M}}x + \mu_{\mathcal{M}}, & d_{\mathcal{L}} < x < d_{\mathcal{R}}, \\ a_{\mathcal{R}}x + \mu_{\mathcal{R}}, & x \geq d_{\mathcal{R}}, \end{cases} \quad \begin{aligned} I_{\mathcal{L}} &= [0, d_{\mathcal{L}}], \\ I_{\mathcal{M}} &= (d_{\mathcal{L}}, d_{\mathcal{R}}), \\ I_{\mathcal{R}} &= [d_{\mathcal{R}}, +\infty). \end{aligned}$$

Conforme varían los parámetros, **bifurcaciones de colisión en el borde (BCB)** ocurren cuando órbitas periódicas colisionan con  $d_{\mathcal{L}}$  o  $d_{\mathcal{R}}$ .

Dependiendo de la posición de estos ciclos se obtienen diferentes estructuras de bifurcación:

- **Estructura “Fin”**: las tres componentes del dominio contienen puntos de los ciclos.
- **Estructura “Skew tent map”**: solo dos componentes adyacentes del dominio contienen puntos de los ciclos.

## Estructuras de bifurcación para funciones PWL bimodales

$$F(x) = \begin{cases} a_{\mathcal{L}}x + \mu_{\mathcal{L}}, & 0 \leq x \leq d_{\mathcal{L}}, \\ a_{\mathcal{M}}x + \mu_{\mathcal{M}}, & d_{\mathcal{L}} < x < d_{\mathcal{R}}, \\ a_{\mathcal{R}}x + \mu_{\mathcal{R}}, & x \geq d_{\mathcal{R}}, \end{cases} \quad \begin{aligned} I_{\mathcal{L}} &= [0, d_{\mathcal{L}}], \\ I_{\mathcal{M}} &= (d_{\mathcal{L}}, d_{\mathcal{R}}), \\ I_{\mathcal{R}} &= [d_{\mathcal{R}}, +\infty). \end{aligned}$$

Conforme varían los parámetros, **bifurcaciones de colisión en el borde (BCB)** ocurren cuando órbitas periódicas colisionan con  $d_{\mathcal{L}}$  o  $d_{\mathcal{R}}$ .

Dependiendo de la posición de estos ciclos se obtienen diferentes estructuras de bifurcación:

- **Estructura “Fin”**: las tres componentes del dominio contienen puntos de los ciclos.
- **Estructura “Skew tent map”**: solo dos componentes adyacentes del dominio contienen puntos de los ciclos.
- **Estructura de adición de período (PAS)**: solo las **componentes externas** contienen puntos de los ciclos.

## PAS para funciones PWL bimodales. Caso general

### Región de periodicidad

*Región en el espacio de parámetros para la que existen ciclos con todos sus puntos en  $I_{\mathcal{L}} \cup I_{\mathcal{R}}$ .*

## PAS para funciones PWL bimodales. Caso general

### Región de periodicidad

*Región en el espacio de parámetros para la que existen ciclos con todos sus puntos en  $I_{\mathcal{L}} \cup I_{\mathcal{R}}$ .*

- Difieren en el número de puntos de los ciclos en  $I_{\mathcal{L}}$  ( $m$  puntos) y  $I_{\mathcal{R}}$  ( $n$  puntos)  $\rightarrow \mathcal{L}^m \mathcal{R}^n$ .

## PAS para funciones PWL bimodales. Caso general

**Región de periodicidad**

Región en el espacio de parámetros para la que existen ciclos con todos sus puntos en  $I_{\mathcal{L}} \cup I_{\mathcal{R}}$ .

- Difieren en el número de puntos de los ciclos en  $I_{\mathcal{L}}$  ( $m$  puntos) y  $I_{\mathcal{R}}$  ( $n$  puntos)  $\rightarrow \mathcal{L}^m \mathcal{R}^n$ .
- Están limitadas por dos variedades  $\xi_{\mathcal{L}}$  y  $\xi_{\mathcal{R}}$  en el espacio de parámetros:



## PAS para funciones PWL bimodales. Caso general

## Región de periodicidad

Región en el espacio de parámetros para la que existen ciclos con todos sus puntos en  $I_{\mathcal{L}} \cup I_{\mathcal{R}}$ .

- Difieren en el número de puntos de los ciclos en  $I_{\mathcal{L}}$  ( $m$  puntos) y  $I_{\mathcal{R}}$  ( $n$  puntos)  $\rightarrow \mathcal{L}^m \mathcal{R}^n$ .
- Están limitadas por dos variedades  $\xi_{\mathcal{L}}$  y  $\xi_{\mathcal{R}}$  en el espacio de parámetros:



- Panchuck *et al.* (2013) proporcionaron un algoritmo para determinar  $\xi_{\mathcal{L}}$  y  $\xi_{\mathcal{R}}$  para todo  $m$  y  $n$  en función de  $a_{\mathcal{L}}$ ,  $a_{\mathcal{R}}$ ,  $d_{\mathcal{L}}$ ,  $d_{\mathcal{R}}$ ,  $\mu_{\mathcal{L}}$  y  $\mu_{\mathcal{R}}$ .

## PAS degenerada bajo $\mu_{\mathcal{L}} = \mu_{\mathcal{R}} = 0$

Foroni *et al.* (2015) estudiaron un problema similar en el campo de la economía. Sustituyendo  $\mu_{\mathcal{L}} = \mu_{\mathcal{R}} = 0$  en las ecuaciones de  $\xi_{\mathcal{L}}$  y  $\xi_{\mathcal{R}}$  llegaron a la siguiente condición:

PAS degenerada bajo  $\mu_{\mathcal{L}} = \mu_{\mathcal{R}} = 0$ 

Foroni *et al.* (2015) estudiaron un problema similar en el campo de la economía. Sustituyendo  $\mu_{\mathcal{L}} = \mu_{\mathcal{R}} = 0$  en las ecuaciones de  $\xi_{\mathcal{L}}$  y  $\xi_{\mathcal{R}}$  llegaron a la siguiente condición:

*Para  $\mu_{\mathcal{L}} = \mu_{\mathcal{R}} = 0$ , las variedades  $\xi_{\mathcal{L}}$  y  $\xi_{\mathcal{R}}$  correspondientes a  $\mathcal{L}^m \mathcal{R}^n$  están dadas por*

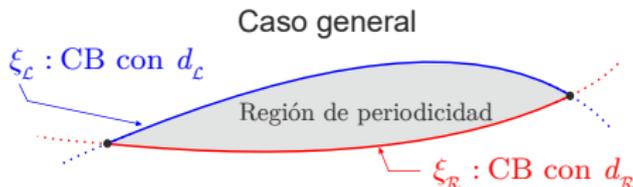
$$a_{\mathcal{L}}^m a_{\mathcal{R}}^n = 1.$$

PAS degenerada bajo  $\mu_{\mathcal{L}} = \mu_{\mathcal{R}} = 0$ 

Foroni *et al.* (2015) estudiaron un problema similar en el campo de la economía. Sustituyendo  $\mu_{\mathcal{L}} = \mu_{\mathcal{R}} = 0$  en las ecuaciones de  $\xi_{\mathcal{L}}$  y  $\xi_{\mathcal{R}}$  llegaron a la siguiente condición:

Para  $\mu_{\mathcal{L}} = \mu_{\mathcal{R}} = 0$ , las variedades  $\xi_{\mathcal{L}}$  y  $\xi_{\mathcal{R}}$  correspondientes a  $\mathcal{L}^m \mathcal{R}^n$  están dadas por

$$a_{\mathcal{L}}^m a_{\mathcal{R}}^n = 1.$$

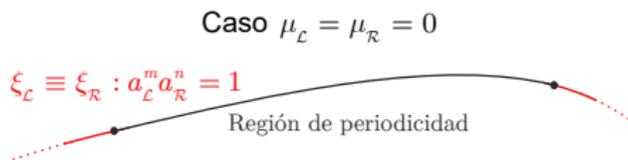


PAS degenerada bajo  $\mu_{\mathcal{L}} = \mu_{\mathcal{R}} = 0$ 

Foroni *et al.* (2015) estudiaron un problema similar en el campo de la economía. Sustituyendo  $\mu_{\mathcal{L}} = \mu_{\mathcal{R}} = 0$  en las ecuaciones de  $\xi_{\mathcal{L}}$  y  $\xi_{\mathcal{R}}$  llegaron a la siguiente condición:

Para  $\mu_{\mathcal{L}} = \mu_{\mathcal{R}} = 0$ , las variedades  $\xi_{\mathcal{L}}$  y  $\xi_{\mathcal{R}}$  correspondientes a  $\mathcal{L}^m \mathcal{R}^n$  están dadas por

$$a_{\mathcal{L}}^m a_{\mathcal{R}}^n = 1.$$



## PAS degenerada bajo $\mu_{\mathcal{L}} = \mu_{\mathcal{R}} = 0$

Foroni *et al.* (2015) estudiaron un problema similar en el campo de la economía. Sustituyendo  $\mu_{\mathcal{L}} = \mu_{\mathcal{R}} = 0$  en las ecuaciones de  $\xi_{\mathcal{L}}$  y  $\xi_{\mathcal{R}}$  llegaron a la siguiente condición:

*Para  $\mu_{\mathcal{L}} = \mu_{\mathcal{R}} = 0$ , las variedades  $\xi_{\mathcal{L}}$  y  $\xi_{\mathcal{R}}$  correspondientes a  $\mathcal{L}^m \mathcal{R}^n$  están dadas por*

$$a_{\mathcal{L}}^m a_{\mathcal{R}}^n = 1.$$

### **Degeneración respecto al caso general:**

- todas las regiones de periodicidad tienen medida de Lebesgue nula en el espacio de parámetros.

PAS degenerada bajo  $\mu_{\mathcal{L}} = \mu_{\mathcal{R}} = 0$ 

Foroni *et al.* (2015) estudiaron un problema similar en el campo de la economía. Sustituyendo  $\mu_{\mathcal{L}} = \mu_{\mathcal{R}} = 0$  en las ecuaciones de  $\xi_{\mathcal{L}}$  y  $\xi_{\mathcal{R}}$  llegaron a la siguiente condición:

*Para  $\mu_{\mathcal{L}} = \mu_{\mathcal{R}} = 0$ , las variedades  $\xi_{\mathcal{L}}$  y  $\xi_{\mathcal{R}}$  correspondientes a  $\mathcal{L}^m \mathcal{R}^n$  están dadas por*

$$a_{\mathcal{L}}^m a_{\mathcal{R}}^n = 1.$$

### Degeneración respecto al caso general:

- todas las regiones de periodicidad tienen medida de Lebesgue nula en el espacio de parámetros.
- todos los puntos de una región de periodicidad son puntos de bifurcación: o bien  $d_{\mathcal{L}}$  o bien  $d_{\mathcal{R}}$  forma parte de un ciclo con todos sus puntos en  $I_{\mathcal{L}} \cup I_{\mathcal{R}}$ .

PAS degenerada bajo  $\mu_{\mathcal{L}} = \mu_{\mathcal{R}} = 0$

**La condición  $a_{\mathcal{L}}^m a_{\mathcal{R}}^n = 1$  no es suficiente.**

PAS degenerada bajo  $\mu_{\mathcal{L}} = \mu_{\mathcal{R}} = 0$

**La condición  $a_{\mathcal{L}}^m a_{\mathcal{R}}^n = 1$  no es suficiente.**

### Ejemplo

Asumamos  $\mu_{\mathcal{L}} = \mu_{\mathcal{R}} = 0$ ,  $a_{\mathcal{L}} > 1$ ,  $0 < a_{\mathcal{R}} < 1$ ,  $a_{\mathcal{L}}^m a_{\mathcal{R}}^n = 1$  para algunos  $m, n \in \mathbb{N}$ . Fijemos puntos de cambio  $d_{\mathcal{R}} > 0$  y  $d_{\mathcal{L}} < \min\{a_{\mathcal{R}} d_{\mathcal{R}}, d_{\mathcal{R}}/a_{\mathcal{L}}\}$ . Entonces,

PAS degenerada bajo  $\mu_{\mathcal{L}} = \mu_{\mathcal{R}} = 0$ 

**La condición  $a_{\mathcal{L}}^m a_{\mathcal{R}}^n = 1$  no es suficiente.**

### Ejemplo

Asumamos  $\mu_{\mathcal{L}} = \mu_{\mathcal{R}} = 0$ ,  $a_{\mathcal{L}} > 1$ ,  $0 < a_{\mathcal{R}} < 1$ ,  $a_{\mathcal{L}}^m a_{\mathcal{R}}^n = 1$  para algunos  $m, n \in \mathbb{N}$ . Fijemos puntos de cambio  $d_{\mathcal{R}} > 0$  y  $d_{\mathcal{L}} < \min\{a_{\mathcal{R}}d_{\mathcal{R}}, d_{\mathcal{R}}/a_{\mathcal{L}}\}$ . Entonces,

$$d_{\mathcal{L}} < \underbrace{a_{\mathcal{L}}d_{\mathcal{L}}}_{F(d_{\mathcal{L}})} < d_{\mathcal{R}} \Rightarrow F(d_{\mathcal{L}}) \in I_{\mathcal{M}},$$

$$d_{\mathcal{L}} < \underbrace{a_{\mathcal{R}}d_{\mathcal{R}}}_{F(d_{\mathcal{R}})} < d_{\mathcal{R}} \Rightarrow F(d_{\mathcal{R}}) \in I_{\mathcal{M}}.$$

PAS degenerada bajo  $\mu_{\mathcal{L}} = \mu_{\mathcal{R}} = 0$ 

**La condición  $a_{\mathcal{L}}^m a_{\mathcal{R}}^n = 1$  no es suficiente.**

### Ejemplo

Asumamos  $\mu_{\mathcal{L}} = \mu_{\mathcal{R}} = 0$ ,  $a_{\mathcal{L}} > 1$ ,  $0 < a_{\mathcal{R}} < 1$ ,  $a_{\mathcal{L}}^m a_{\mathcal{R}}^n = 1$  para algunos  $m, n \in \mathbb{N}$ . Fijemos puntos de cambio  $d_{\mathcal{R}} > 0$  y  $d_{\mathcal{L}} < \min\{a_{\mathcal{R}}d_{\mathcal{R}}, d_{\mathcal{R}}/a_{\mathcal{L}}\}$ . Entonces,

$$d_{\mathcal{L}} < \underbrace{a_{\mathcal{L}}d_{\mathcal{L}}}_{F(d_{\mathcal{L}})} < d_{\mathcal{R}} \Rightarrow F(d_{\mathcal{L}}) \in I_{\mathcal{M}},$$

$$d_{\mathcal{L}} < \underbrace{a_{\mathcal{R}}d_{\mathcal{R}}}_{F(d_{\mathcal{R}})} < d_{\mathcal{R}} \Rightarrow F(d_{\mathcal{R}}) \in I_{\mathcal{M}}.$$

**No ocurre ninguna BCB de la PAS.**

PAS degenerada bajo  $\mu_{\mathcal{L}} = \mu_{\mathcal{R}} = 0$ 

**La condición  $a_{\mathcal{L}}^m a_{\mathcal{R}}^n = 1$  no es suficiente.**

### Ejemplo

Asumamos  $\mu_{\mathcal{L}} = \mu_{\mathcal{R}} = 0$ ,  $a_{\mathcal{L}} > 1$ ,  $0 < a_{\mathcal{R}} < 1$ ,  $a_{\mathcal{L}}^m a_{\mathcal{R}}^n = 1$  para algunos  $m, n \in \mathbb{N}$ . Fijemos puntos de cambio  $d_{\mathcal{R}} > 0$  y  $d_{\mathcal{L}} < \min\{a_{\mathcal{R}}d_{\mathcal{R}}, d_{\mathcal{R}}/a_{\mathcal{L}}\}$ . Entonces,

$$d_{\mathcal{L}} < \underbrace{a_{\mathcal{L}}d_{\mathcal{L}}}_{F(d_{\mathcal{L}})} < d_{\mathcal{R}} \Rightarrow F(d_{\mathcal{L}}) \in I_{\mathcal{M}},$$

$$d_{\mathcal{L}} < \underbrace{a_{\mathcal{R}}d_{\mathcal{R}}}_{F(d_{\mathcal{R}})} < d_{\mathcal{R}} \Rightarrow F(d_{\mathcal{R}}) \in I_{\mathcal{M}}.$$

**No ocurre ninguna BCB de la PAS.**

PAS degenerada bajo  $\mu_{\mathcal{L}} = \mu_{\mathcal{R}} = 0$

**La condición  $a_{\mathcal{L}}^m a_{\mathcal{R}}^n = 1$  no es suficiente.**

**La no suficiencia impide la correcta determinación de los puntos de bifurcación para CALC con esta condición.**

PAS degenerada bajo  $\mu_{\mathcal{L}} = \mu_{\mathcal{R}} = 0$

**La condición  $a_{\mathcal{L}}^m a_{\mathcal{R}}^n = 1$  no es suficiente.**

**La no suficiencia impide la correcta determinación de los puntos de bifurcación para CALC con esta condición.**

Para poblaciones descritas por la función de Ricker

$$f(x) = xe^{3(1-x/60)}$$

y controladas por CALC,

PAS degenerada bajo  $\mu_{\mathcal{L}} = \mu_{\mathcal{R}} = 0$

**La condición  $a_{\mathcal{L}}^m a_{\mathcal{R}}^n = 1$  no es suficiente.**

**La no suficiencia impide la correcta determinación de los puntos de bifurcación para CALC con esta condición.**

Para poblaciones descritas por la función de Ricker

$$f(x) = xe^{3(1-x/60)}$$

y controladas por CALC,

- 2 BCB ocurren.

PAS degenerada bajo  $\mu_{\mathcal{L}} = \mu_{\mathcal{R}} = 0$

**La condición  $a_{\mathcal{L}}^m a_{\mathcal{R}}^n = 1$  no es suficiente.**

**La no suficiencia impide la correcta determinación de los puntos de bifurcación para CALC con esta condición.**

Para poblaciones descritas por la función de Ricker

$$f(x) = xe^{3(1-x/60)}$$

y controladas por CALC,

- **2** BCB ocurren.
- **31** BCB se esperarían hasta período 10 con la condición determinada por Foroni *et al.*

## PAS degenerada bajo $\mu_{\mathcal{L}} = \mu_{\mathcal{R}} = 0$

### ¿Suficiencia?

El ejemplo anterior muestra que  $d_{\mathcal{L}}$  y  $d_{\mathcal{R}}$  juegan un papel clave en la determinación de las regiones de periodicidad en el caso degenerado.

PAS degenerada bajo  $\mu_{\mathcal{L}} = \mu_{\mathcal{R}} = 0$ 

## ¿Suficiencia?

El ejemplo anterior muestra que  $d_{\mathcal{L}}$  y  $d_{\mathcal{R}}$  juegan un papel clave en la determinación de las regiones de periodicidad en el caso degenerado.

*Proposición 6*

Una BCB de la PAS para funciones PWL bimodales con  $\mu_{\mathcal{L}} = \mu_{\mathcal{R}} = 0$  ocurre **si y solo si** existen  $\lambda \in (0, 1)$  y  $m, n \in \mathbb{N}$  con  $\text{mcd}(m, n) = 1$  tales que  $a_{\mathcal{L}} = \lambda^{-n}$ ,  $a_{\mathcal{R}} = \lambda^m$  y  $\lambda d_{\mathcal{R}} \leq d_{\mathcal{L}}$ .

PAS degenerada bajo  $\mu_{\mathcal{L}} = \mu_{\mathcal{R}} = 0$ 

## ¿Suficiencia?

El ejemplo anterior muestra que  $d_{\mathcal{L}}$  y  $d_{\mathcal{R}}$  juegan un papel clave en la determinación de las regiones de periodicidad en el caso degenerado.

*Proposición 6*

Una BCB de la PAS para funciones PWL bimodales con  $\mu_{\mathcal{L}} = \mu_{\mathcal{R}} = 0$  ocurre **si y solo si** existen  $\lambda \in (0, 1)$  y  $m, n \in \mathbb{N}$  con  $\text{mcd}(m, n) = 1$  tales que  $a_{\mathcal{L}} = \lambda^{-n}$ ,  $a_{\mathcal{R}} = \lambda^m$  y  $\lambda d_{\mathcal{R}} \leq d_{\mathcal{L}}$ .

*Demostración:*

Muy larga...

## Aplicación 1: PAS de CALC

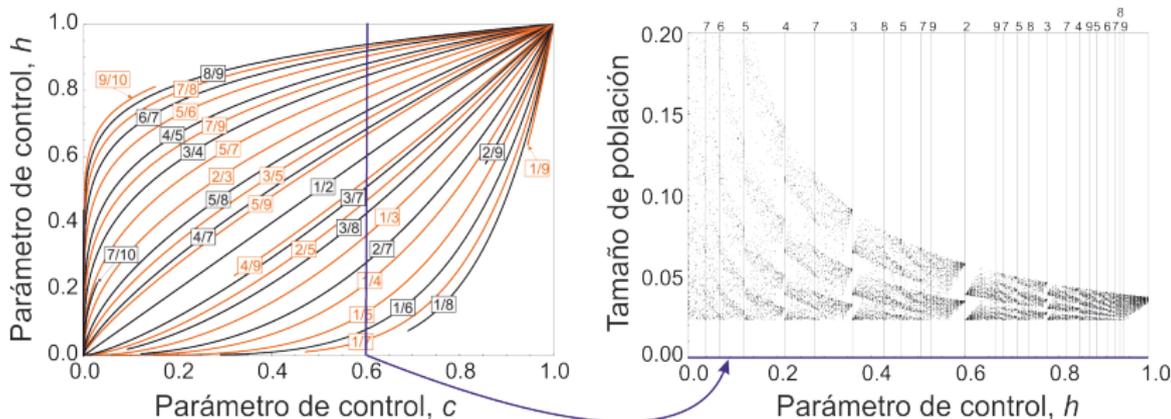
*Corolario 7*

Una BCB de la PAS de CALC ocurre **si y solo si** existen  $\lambda \in (0, 1)$  y  $m, n \in \mathbb{N}$  con  $\text{mcd}(m, n) = 1$  tales que  $h = \lambda^n$ ,  $c = \lambda^m$  y  $\lambda A_R \leq A_H$ .

# Aplicación 1: PAS de CALC

## Corolario 7

Una BCB de la PAS de CALC ocurre **si y solo si** existen  $\lambda \in (0, 1)$  y  $m, n \in \mathbb{N}$  con  $\text{mcd}(m, n) = 1$  tales que  $h = \lambda^n$ ,  $c = \lambda^m$  y  $\lambda A_R \leq A_H$ .



Aplicación 2: completar la PAS del problema en Forni *et al.* (2015)

Forni *et al.* (2015) consideraron el problema dado por

$$\begin{aligned} a_{\mathcal{L}} &= 1+r, & d_{\mathcal{L}} &= \epsilon/(\epsilon+r), & \mu_{\mathcal{L}} &= 0, \\ a_{\mathcal{R}} &= 1-r, & d_{\mathcal{R}} &= \epsilon/(\epsilon-r), & \mu_{\mathcal{R}} &= 0, \end{aligned}$$

donde  $r \in (0,1)$  y  $\epsilon > r$ .

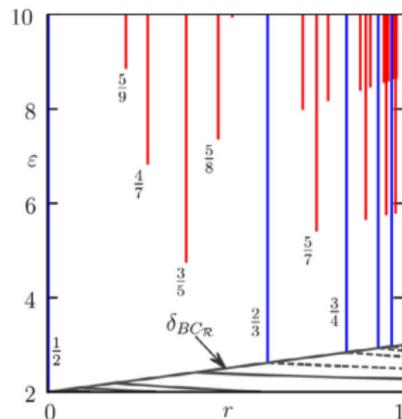
## Aplicación 2: completar la PAS del problema en Forni *et al.* (2015)

Forni *et al.* (2015) consideraron el problema dado por

$$\begin{aligned} a_{\mathcal{L}} &= 1+r, & d_{\mathcal{L}} &= \epsilon/(\epsilon+r), & \mu_{\mathcal{L}} &= 0, \\ a_{\mathcal{R}} &= 1-r, & d_{\mathcal{R}} &= \epsilon/(\epsilon-r), & \mu_{\mathcal{R}} &= 0, \end{aligned}$$

donde  $r \in (0,1)$  y  $\epsilon > r$ .

Forni *et al.* determinaron numéricamente la PAS de este problema:





## Aplicación 2: completar la PAS del problema en Forni *et al.* (2015)

### Corolario 8

Considerar  $\mu_{\mathcal{L}} = \mu_{\mathcal{R}} = 0$ ,  $a_{\mathcal{L}} = 1 + r$ ,  $a_{\mathcal{R}} = 1 - r$ ,  $d_{\mathcal{L}} = \epsilon/(\epsilon+r)$ , y  $d_{\mathcal{R}} = \epsilon/(\epsilon-r)$ , con  $r \in (0, 1)$  y  $\epsilon > r$ . Entonces, una BCB de la PAS ocurre **si y solo si** existen  $m, n \in \mathbb{N}$  con  $\text{mcd}(m, n) = 1$  tales que

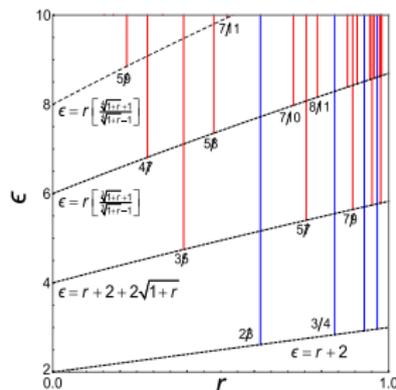
$$(1+r)^m(1-r)^n = 1 \text{ y } \epsilon \geq r \left( \frac{\sqrt[n]{1+r+1}}{\sqrt[n]{1+r-1}} \right).$$

## Aplicación 2: completar la PAS del problema en Forni *et al.* (2015)

### Corolario 8

Considerar  $\mu_{\mathcal{L}} = \mu_{\mathcal{R}} = 0$ ,  $a_{\mathcal{L}} = 1 + r$ ,  $a_{\mathcal{R}} = 1 - r$ ,  $d_{\mathcal{L}} = \epsilon/(\epsilon+r)$ , y  $d_{\mathcal{R}} = \epsilon/(\epsilon-r)$ , con  $r \in (0, 1)$  y  $\epsilon > r$ . Entonces, una BCB de la PAS ocurre **si y solo si** existen  $m, n \in \mathbb{N}$  con  $\text{mcd}(m, n) = 1$  tales que

$$(1+r)^m(1-r)^n = 1 \text{ y } \epsilon \geq r \left( \frac{\sqrt[n]{1+r+1}}{\sqrt[m]{1+r-1}} \right).$$



## BCB degeneradas

Caso  $\mu_{\mathcal{L}} \cdot \mu_{\mathcal{R}} \neq 0$ :

$$\mu_{\mathcal{L}} = 2,$$

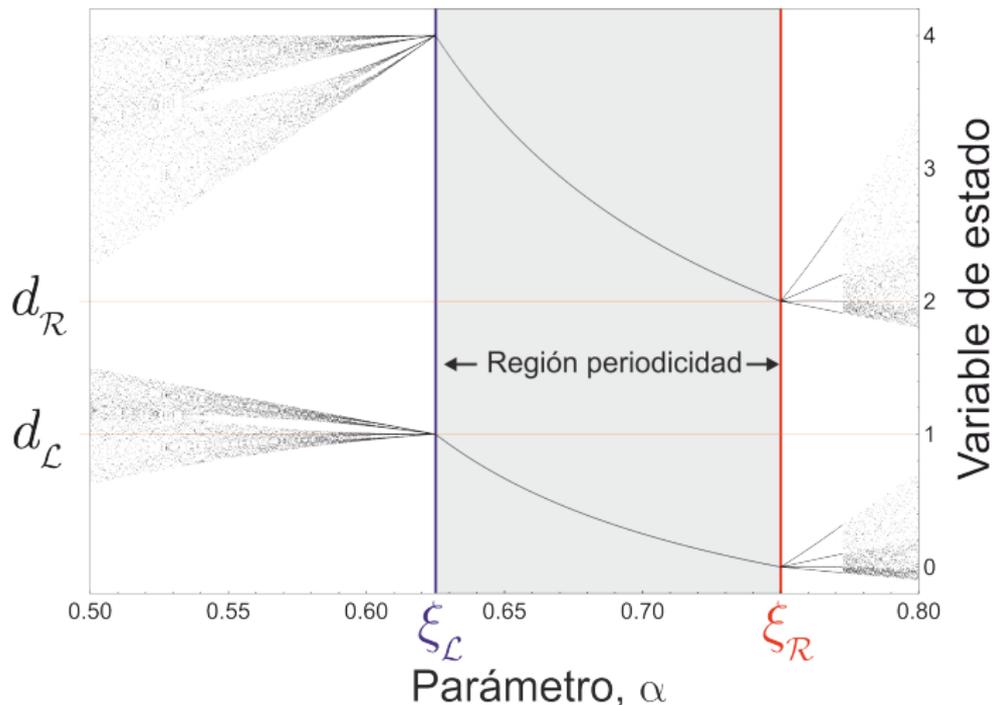
$$\mu_{\mathcal{R}} = 1/2,$$

$$d_{\mathcal{L}} = 1,$$

$$d_{\mathcal{R}} = 2,$$

$$a_{\mathcal{L}} = 2,$$

$$a_{\mathcal{R}} = 1 - \alpha,$$



## BCB degeneradas

Caso  $\mu_{\mathcal{L}} = \mu_{\mathcal{R}} = 0$ :

$$\mu_{\mathcal{L}} = 0,$$

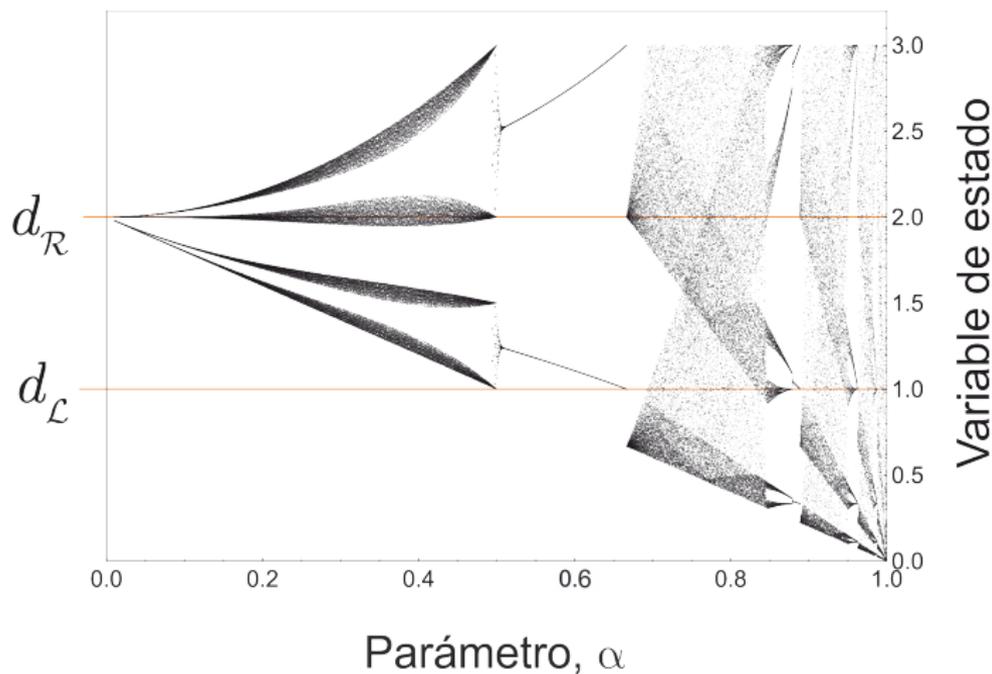
$$\mu_{\mathcal{R}} = 0,$$

$$d_{\mathcal{L}} = 1,$$

$$d_{\mathcal{R}} = 2,$$

$$a_{\mathcal{L}} = 3,$$

$$a_{\mathcal{R}} = 1 - \alpha,$$



## BCB degeneradas

Caso  $\mu_{\mathcal{L}} = \mu_{\mathcal{R}} = 0$ :

$$\mu_{\mathcal{L}} = 0,$$

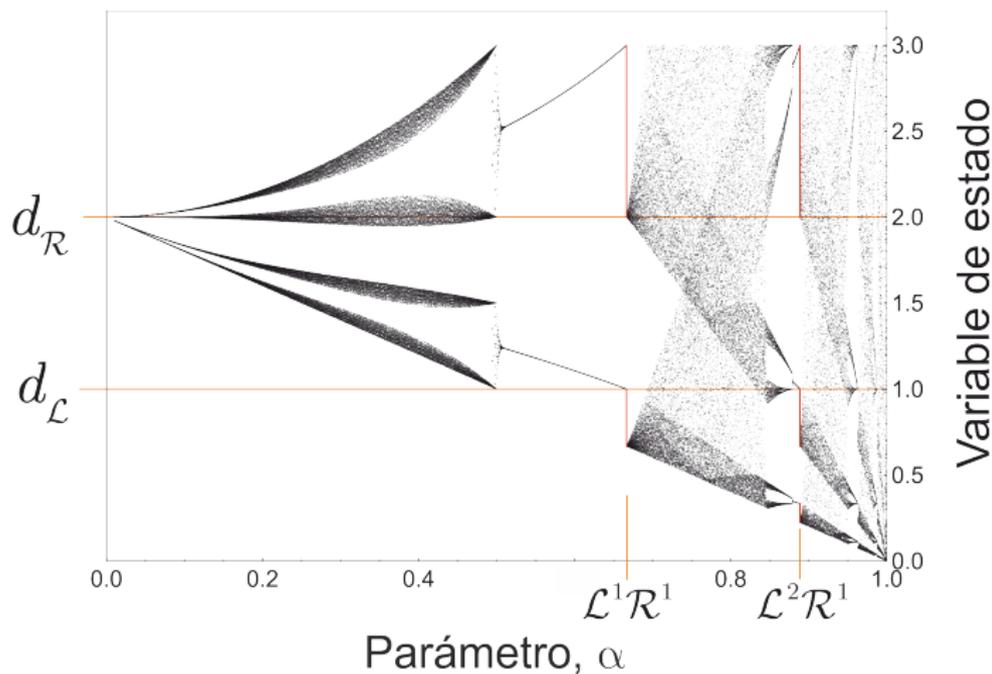
$$\mu_{\mathcal{R}} = 0,$$

$$d_{\mathcal{L}} = 1,$$

$$d_{\mathcal{R}} = 2,$$

$$a_{\mathcal{L}} = 3,$$

$$a_{\mathcal{R}} = 1 - \alpha,$$



## BCB degeneradas

*Proposición 9*

Considerar  $\mu_{\mathcal{L}} = \mu_{\mathcal{R}} = 0$ . Asumir que existen  $\lambda \in (0, 1)$  y  $m, n \in \mathbb{N}$  con  $\text{mcd}(m, n) = 1$  tales que  $a_{\mathcal{L}} = \lambda^{-n}$ ,  $a_{\mathcal{R}} = \lambda^m$  y  $\lambda d_{\mathcal{R}} \leq d_{\mathcal{L}}$ . Se cumple que:

- (i) Si  $\lambda d_{\mathcal{R}} < d_{\mathcal{L}}$ , entonces todos los puntos en

$$\mathcal{B} = \bigcup_{i=-n}^{m-1} [\lambda^{i+1} d_{\mathcal{R}}, \lambda^i d_{\mathcal{L}}]$$

son  $(m+n)$ -periódicos y sus órbitas tienen  $m$  puntos en  $(0, d_{\mathcal{L}})$  y  $n$  puntos en  $(d_{\mathcal{R}}, +\infty)$ .

- (ii) Si  $\lambda d_{\mathcal{R}} = d_{\mathcal{L}}$ , entonces  $d_{\mathcal{L}}$  y  $d_{\mathcal{R}}$  pertenecen a la misma órbita periódica de período  $m+n$  con  $m$  puntos en  $I_{\mathcal{L}}$  y  $n$  puntos en  $I_{\mathcal{R}}$ .

## BCB degeneradas

$$\mathcal{L}^1\mathcal{R}^1 \rightarrow \underbrace{[\lambda d_{\mathcal{R}}, d_{\mathcal{L}}]}_{\mathcal{L}} \cup \underbrace{[d_{\mathcal{R}}, d_{\mathcal{L}}/\lambda]}_{\mathcal{R}}$$

$$\mathcal{L}^2\mathcal{R}^1 \rightarrow \underbrace{[\lambda^2 d_{\mathcal{R}}, \lambda d_{\mathcal{L}}]}_{\mathcal{L}} \cup \underbrace{[\lambda d_{\mathcal{R}}, d_{\mathcal{L}}]}_{\mathcal{L}} \cup \underbrace{[d_{\mathcal{R}}, d_{\mathcal{L}}/\lambda]}_{\mathcal{R}}$$

$$\mathcal{L}^1\mathcal{R}^2 \rightarrow \underbrace{[\lambda d_{\mathcal{R}}, d_{\mathcal{L}}]}_{\mathcal{L}} \cup \underbrace{[d_{\mathcal{R}}, d_{\mathcal{L}}/\lambda] \cup [d_{\mathcal{R}}/\lambda, d_{\mathcal{L}}/\lambda^2]}_{\mathcal{R}}$$

$$\mathcal{L}^3\mathcal{R}^1 \rightarrow \underbrace{[\lambda^3 d_{\mathcal{R}}, \lambda^2 d_{\mathcal{L}}] \cup [\lambda^2 d_{\mathcal{R}}, \lambda d_{\mathcal{L}}] \cup [\lambda d_{\mathcal{R}}, d_{\mathcal{L}}]}_{\mathcal{L}} \cup \underbrace{[d_{\mathcal{R}}, d_{\mathcal{L}}/\lambda]}_{\mathcal{R}}$$

$$\mathcal{L}^2\mathcal{R}^2 \rightarrow \underbrace{[\lambda^2 d_{\mathcal{R}}, \lambda d_{\mathcal{L}}] \cup [\lambda d_{\mathcal{R}}, d_{\mathcal{L}}]}_{\mathcal{L}} \cup \underbrace{[d_{\mathcal{R}}, d_{\mathcal{L}}/\lambda] \cup [d_{\mathcal{R}}/\lambda, d_{\mathcal{L}}/\lambda^2]}_{\mathcal{R}}$$

$$\mathcal{L}^1\mathcal{R}^3 \rightarrow \underbrace{[\lambda d_{\mathcal{R}}, d_{\mathcal{L}}]}_{\mathcal{L}} \cup \underbrace{[d_{\mathcal{R}}, d_{\mathcal{L}}/\lambda] \cup [d_{\mathcal{R}}/\lambda, d_{\mathcal{L}}/\lambda^2] \cup [d_{\mathcal{R}}/\lambda^2, d_{\mathcal{L}}/\lambda^3]}_{\mathcal{R}}$$

---

**Financiación:** Ministerio de Economía y Competitividad y FEDER, proyecto MTM2017-85054-C2-2-P.

---

**¡Gracias por la atención!**