Variedades invariantes de puntos y toros parabólicos con parte nilpotente

Clara Cufí-Cabré, Universitat Autònoma de Barcelona
en colaboración con Ernest Fontich, Universitat de Barcelona

8 de septiembre de 2021

Ddays 2021, Lleida

- Consideramos sistemas dinámicos dados por un difeomorfismo, F.

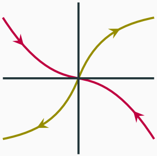

Figura 1: Dinámica alrededor de un punto fijo p cuando $DF(p)$ tiene vaps a, b con $|a| < 1$, $|b| > 1$.

- Existencia y unicidad de variedades estable e inestable
- Flujo conjugado al flujo lineal de $DF(p)$

- ¿Qué pasa si $|a|, |b| = 1$ o $DF(p)$ no es diagonalizable?
  - La dinámica depende de los términos no lineales de F
  - Pueden existir variedades estables e inestables *lentas*

- Consideramos sistemas dinámicos dados por un difeomorfismo, F.

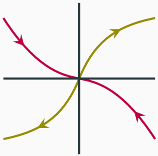

Figura 1: Dinámica alrededor de un punto fijo p cuando $DF(p)$ tiene vaps a, b con $|a| < 1$, $|b| > 1$.

- Existencia y unicidad de variedades estable e inestable
- Flujo conjugado al flujo lineal de $DF(p)$

- ¿Qué pasa si $|a|, |b| = 1$ o $DF(p)$ no es diagonalizable?
  - La dinámica depende de los términos no lineales de F
  - Pueden existir variedades estables e inestables *lentas*

- Consideramos sistemas dinámicos dados por un difeomorfismo, F.

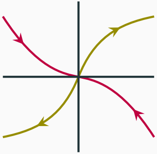

Figura 1: Dinámica alrededor de un punto fijo p cuando $DF(p)$ tiene vaps a, b con $|a| < 1$, $|b| > 1$.

- Existencia y unicidad de variedades estable e inestable
- Flujo conjugado al flujo lineal de $DF(p)$

- ¿Qué pasa si $|a|$, $|b| = 1$ o $DF(p)$ no es diagonalizable?

  - La dinámica depende de los términos no lineales de F
  - Pueden existir variedades estables e inestables *lentas*

Puntos parabólicos de sistemas dinámicos en el plano

- Sea $F : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, analítica o C^r, con $F(0) = 0$ y

$$DF(0) = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad c \neq 0,$$

- Estudiamos la existencia y regularidad de curvas invariantes para F asintóticas a 0.

- F se puede escribir como

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x + c\,y \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_k x^k + b_l y x^{l-1} + O(x^{k+1}) + O(yx^l) + O(y^2) \end{pmatrix},$$

con $c > 0$, $k, l \geq 2$.

- En esta charla nos quedamos con el caso $k < 2l - 1$, que incluye el caso genérico.

- Sea $F : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, analítica o C^r, con $F(0) = 0$ y

$$DF(0) = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad c \neq 0,$$

- Estudiamos la existencia y regularidad de curvas invariantes para F asintóticas a 0.

- F se puede escribir como

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x + c\, y \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_k x^k + b_l y x^{l-1} + O(x^{k+1}) + O(yx^l) + O(y^2) \end{pmatrix},$$

con $c > 0$, $k, l \geq 2$.

- En esta charla nos quedamos con el caso $k < 2l - 1$, que incluye el caso genérico.

El método de la parametrización

- Objetivo: obtener parametrizaciones $K(t)$ y $R(t)$ que satisfagan

$$F \circ K = K \circ R. \tag{1}$$

- Enfoque: considerar (1) como una ecuación funcional definida por un operador,

$$\mathcal{T}(F, K, R) := F \circ K - K \circ R = 0,$$

y estudiar las propiedades de $\mathcal{T}$ en un espacio de funciones adecuado.

- Buscamos K con $K(0) = (0, 0)$ y K tangente al vector propio $(1, 0)$.

1. Resultado *a posteriori:* Suponiendo que existe una variedad «próxima a invariante» que satisface ciertas hipótesis, demostramos que existe una variedad invariante verdadera cerca de ella.

2. Damos un algoritmo para calcular una aproximación, $\mathcal{K}_n$, de una parametrizción de la variedad invariante, y una expresión para R, que cumplen las hipótesis.

En consecuencia:

- La combinación de los resultados da la existencia de una variedad invariante.
- La parametrización calculada, $\mathcal{K}_n$, es una aproximación de una variedad invariante existente.

1. Resultado *a posteriori:* Suponiendo que existe una variedad «próxima a invariante» que satisface ciertas hipótesis, demostramos que existe una variedad invariante verdadera cerca de ella.

2. Damos un algoritmo para calcular una aproximación, $\mathcal{K}_n$, de una parametrizción de la variedad invariante, y una expresión para R, que cumplen las hipótesis.

En consecuencia:

- La combinación de los resultados da la existencia de una variedad invariante.
- La parametrización calculada, $\mathcal{K}_n$, es una aproximación de una variedad invariante existente.

Proposición

Sea F de clase C^∞, de la forma anterior, con $a_k > 0$. Para todo $n \geq 2$, existen polinomios $\mathcal{K}_n$ y $\mathcal{R}_n$ de la forma

$$\mathcal{K}_n(t) = \begin{pmatrix} t^2 + \cdots + K_n^x t^n \\ K_{k+1}^y t^{k+1} + \cdots + K_{n+k-1}^y t^{n+k-1} \end{pmatrix}$$

y

$$R = \mathcal{R}_n(t) = t + R_k t^k + R_{2k-1} t^{2k-1}$$

tales que

$$F(\mathcal{K}_n(t)) - \mathcal{K}_n(\mathcal{R}_n(t)) = (O(t^{n+k}),\ O(t^{n+2k-1})),$$

con

$$K_{k+1}^y = \pm\sqrt{\frac{2\,a_k}{c\,(k+1)}}, \qquad R_k = \pm\sqrt{\frac{c\,a_k}{2(k+1)}} = \frac{c}{2} K_{k+1}^y.$$

- $\mathcal{K}_n$ es una aproximación formal de una variedad invariante de F.

- Obtenemos inductivamente un algoritmo para calcular los coeficientes de $\mathcal{K}_n$ y $\mathcal{R}_n$

- Para $n = 2$ la expansión de $F \circ \mathcal{K}_2 - \mathcal{K}_2 \circ \mathcal{R}_2$ se escribe

$$\begin{pmatrix} c\, K^y_{k+1} t^{k+1} - 2R_k t^{k+1} + O(t^{2k}) \\ a_k t^{2k} - (k+1) K^y_{k+1} R_k t^{2k} + O(t^{2k+1}) \end{pmatrix},$$

y imponiendo $F \circ \mathcal{K}_2 - \mathcal{K}_2 \circ \mathcal{R}_2 = (O(t^{2k}),\, O(t^{2k+1}))$, se obtienen los coeficientes

$$K^y_{k+1} = \pm\sqrt{\frac{2\, a_k}{c\,(k+1)}}, \qquad R_k = \pm\sqrt{\frac{c\, a_k}{2(k+1)}} = \frac{c}{2} K^y_{k+1}.$$

- Obtenemos inductivamente un algoritmo para calcular los coeficientes de $\mathcal{K}_n$ y $\mathcal{R}_n$

- Para $n=2$ la expansión de $F \circ \mathcal{K}_2 - \mathcal{K}_2 \circ \mathcal{R}_2$ se escribe

$$\begin{pmatrix} c\,K^y_{k+1} t^{k+1} - 2R_k t^{k+1} + O(t^{2k}) \\ a_k t^{2k} - (k+1) K^y_{k+1} R_k t^{2k} + O(t^{2k+1}) \end{pmatrix},$$

y imponiendo $F \circ \mathcal{K}_2 - \mathcal{K}_2 \circ \mathcal{R}_2 = (O(t^{2k}),\ O(t^{2k+1}))$, se obtienen los coeficientes

$$K^y_{k+1} = \pm\sqrt{\frac{2\,a_k}{c\,(k+1)}}, \qquad R_k = \pm\sqrt{\frac{c\,a_k}{2(k+1)}} = \frac{c}{2} K^y_{k+1}.$$

- En los siguientes pasos buscamos

$$\mathcal{K}_{n+1}(t) = \mathcal{K}_n(t) + \begin{pmatrix} K^x_{n+1}\, t^{n+1} \\ K^y_{n+k}\, t^{n+k} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{R}_{n+1}(t) = \mathcal{R}_n(t) + R_{n+k-1}\, t^{n+k-1},$$

tales que $F \circ \mathcal{K}_{n+1} - \mathcal{K}_{n+1} \circ \mathcal{R}_{n+1} = (O(t^{n+k+1}),\, O(t^{n+2k}))$.

- Esta condición se traduce en un sistema lineal,

$$\begin{pmatrix} -(n+1)R_k & c \\ k\, a_k & -(n+k)\, R_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^x_{n+1} \\ K^y_{n+k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -[\mathcal{G}^x_n]_{n+k} + 2\, R_{n+k-1} \\ -[\mathcal{G}^y_n]_{n+2k-1} + (k+1)\, K^y_{k+1}\, R_{n+k-1} \end{pmatrix},$$

que permite determinar K^x_{n+1}, K^y_{n+k}.

- Podemos escoger $R_i = 0$ para $i \neq k, 2k-1$ obteniendo la forma normal $\mathcal{R}_n(t) = t + R_k t^k + R_{2k-1} t^{2k-1}$.

- En los siguientes pasos buscamos

$$\mathcal{K}_{n+1}(t) = \mathcal{K}_n(t) + \begin{pmatrix} K^x_{n+1}\, t^{n+1} \\ K^y_{n+k}\, t^{n+k} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{R}_{n+1}(t) = \mathcal{R}_n(t) + R_{n+k-1}\, t^{n+k-1},$$

tales que $F \circ \mathcal{K}_{n+1} - \mathcal{K}_{n+1} \circ \mathcal{R}_{n+1} = (O(t^{n+k+1}),\ O(t^{n+2k}))$.

- Esta condición se traduce en un sistema lineal,

$$\begin{pmatrix} -(n+1)R_k & c \\ k\, a_k & -(n+k)\, R_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^x_{n+1} \\ K^y_{n+k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -[\mathcal{G}^x_n]_{n+k} + 2\, R_{n+k-1} \\ -[\mathcal{G}^y_n]_{n+2k-1} + (k+1)\, K^y_{k+1}\, R_{n+k-1} \end{pmatrix},$$

que permite determinar K^x_{n+1}, K^y_{n+k}.

- Podemos escoger $R_i = 0$ para $i \neq k, 2k-1$ obteniendo la forma normal $\mathcal{R}_n(t) = t + R_k t^k + R_{2k-1} t^{2k-1}$.

- En los siguientes pasos buscamos

$$\mathcal{K}_{n+1}(t) = \mathcal{K}_n(t) + \begin{pmatrix} K^x_{n+1}\, t^{n+1} \\ K^y_{n+k}\, t^{n+k} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{R}_{n+1}(t) = \mathcal{R}_n(t) + R_{n+k-1}\, t^{n+k-1},$$

tales que $F \circ \mathcal{K}_{n+1} - \mathcal{K}_{n+1} \circ \mathcal{R}_{n+1} = (O(t^{n+k+1}),\ O(t^{n+2k}))$.

- Esta condición se traduce en un sistema lineal,

$$\begin{pmatrix} -(n+1)R_k & c \\ k\, a_k & -(n+k)\, R_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^x_{n+1} \\ K^y_{n+k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -[\mathcal{G}^x_n]_{n+k} + 2\, R_{n+k-1} \\ -[\mathcal{G}^y_n]_{n+2k-1} + (k+1)\, K^y_{k+1}\, R_{n+k-1} \end{pmatrix},$$

que permite determinar $K^x_{n+1},\ K^y_{n+k}$.

- Podemos escoger $R_i = 0$ para $i \neq k, 2k-1$ obteniendo la forma normal $\mathcal{R}_n(t) = t + R_k t^k + R_{2k-1} t^{2k-1}$.

Teorema

Sea $F : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de la forma anterior, analítica, y sean $\hat{K}$, $\hat{R}$ funciones analíticas de la forma

$$\hat{K}(t) = (O(t^2), O(t^{k+1})), \qquad \hat{R}(t) = t + \hat{R}_k t^k + O(t^{k+1}),$$

con $\hat{R}_k < 0$, tales que

$$F(\hat{K}(t)) - \hat{K}(\hat{R}(t)) = (O(t^{n+k}), O(t^{n+2k-1})), \quad n \geq 2.$$

Entonces existe una función $K : [0, \rho) \to \mathbb{R}^2$, analítica en $(0, \rho)$, y una función analica $R : (-\rho, \rho) \to \mathbb{R}$ tales que

$$F(K(t)) = K(R(t)), \qquad t \in [0, \rho),$$

y

$$K(t) - \hat{K}(t) = (O(t^{n+1}), O(t^{n+k})), \qquad R(t) - \hat{R}(t) = O(t^{2k-1}).$$

- $\hat{K}$ y $\hat{R}$ son aproximaciones de K y R. K es una variedad invariante analítica de F.

Teorema

Sea $F : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de la forma anterior, de clase C^r. Supongamos que $r \geq \frac{3}{2}k$. Sean $\hat{K}$, $\hat{R}$ funciones analíticas de la forma

$$\hat{K}(t) = (O(t^2), O(t^{k+1})), \qquad \hat{R}(t) = t + \hat{R}_k t^k + O(t^{k+1}),$$

con $\hat{R}_k < 0$, tales que

$$F(\hat{K}(t)) - \hat{K}(\hat{R}(t)) = (O(t^{n+k}), O(t^{n+2k-1})), \quad n \geq 2.$$

Entonces existe una función $H : [0, \rho) \to \mathbb{R}^2$, $H \in C^r(0, \rho)$, y una función analítica $R : (-\rho, \rho) \to \mathbb{R}$ tales que

$$F(H(t)) = H(R(t)), \qquad t \in [0, \rho),$$

y

$$H(t) - \hat{K}(t) = (O(t^{n+1}), O(t^{n+k})), \qquad R(t) - \hat{R}(t) = O(t^{2k-1}).$$

- $\hat{K}$ y $\hat{R}$ son aproximaciones de H y R. H es una variedad invariante de F de clase C^r.

Una idea de la demostración (caso analítico)

- Dada F consideramos aproximaciones polinomiales $\mathcal{K}_n$ y $\mathcal{R}_n$ de soluciones de

$$F \circ K = K \circ R.$$

- Escogemos $R = \mathcal{R}_n$ y buscamos una corrección $\Delta : [0, \rho) \to \mathbb{R}^2$ de $\mathcal{K}_n$, analítica en $(0, \rho)$, tales que $K = \mathcal{K}_n + \Delta$, $R = \mathcal{R}_n$ satisfagan

$$F \circ (\mathcal{K}_n + \Delta) = (\mathcal{K}_n + \Delta) \circ R.$$

- Definimos un operator, $\mathcal{T}_{n,F}$, asociado con F, $\mathcal{K}_n$ y R que permite escribir esta ecuación como

$$\Delta = \mathcal{T}_{n,F}(\Delta),$$

y aplicamos el teorema del punto fijo de Banach para obtener la solución.

- Hay que calcular $\mathcal{K}_n$ con n suficientemente grande para que $\mathcal{T}_{n,F}$ sea contractivo.

Una idea de la demostración (caso analítico)

- Dada F consideramos aproximaciones polinomiales $\mathcal{K}_n$ y $\mathcal{R}_n$ de soluciones de

$$F \circ K = K \circ R.$$

- Escogemos $R = \mathcal{R}_n$ y buscamos una corrección $\Delta : [0, \rho) \to \mathbb{R}^2$ de $\mathcal{K}_n$, analítica en $(0, \rho)$, tales que $K = \mathcal{K}_n + \Delta$, $R = \mathcal{R}_n$ satisfagan

$$F \circ (\mathcal{K}_n + \Delta) = (\mathcal{K}_n + \Delta) \circ R.$$

- Definimos un operator, $\mathcal{T}_{n,F}$, asociado con F, $\mathcal{K}_n$ y R que permite escribir esta ecuación como

$$\Delta = \mathcal{T}_{n,F}(\Delta),$$

y aplicamos el teorema del punto fijo de Banach para obtener la solución.

- Hay que calcular $\mathcal{K}_n$ con n suficientemente grande para que $\mathcal{T}_{n,F}$ sea contractivo.

Una idea de la demostración (caso analítico)

- Dada F consideramos aproximaciones polinomiales $\mathcal{K}_n$ y $\mathcal{R}_n$ de soluciones de

$$F \circ K = K \circ R.$$

- Escogemos $R = \mathcal{R}_n$ y buscamos una corrección $\Delta : [0, \rho) \to \mathbb{R}^2$ de $\mathcal{K}_n$, analítica en $(0, \rho)$, tales que $K = \mathcal{K}_n + \Delta$, $R = \mathcal{R}_n$ satisfagan

$$F \circ (\mathcal{K}_n + \Delta) = (\mathcal{K}_n + \Delta) \circ R.$$

- Definimos un operator, $\mathcal{T}_{n,F}$, asociado con F, $\mathcal{K}_n$ y R que permite escribir esta ecuación como

$$\Delta = \mathcal{T}_{n,F}(\Delta),$$

y aplicamos el teorema del punto fijo de Banach para obtener la solución.

- Hay que calcular $\mathcal{K}_n$ con n suficientemente grande para que $\mathcal{T}_{n,F}$ sea contractivo.

Una idea de la demostración (caso analítico)

- Dada F consideramos aproximaciones polinomiales $\mathcal{K}_n$ y $\mathcal{R}_n$ de soluciones de

$$F \circ K = K \circ R.$$

- Escogemos $R = \mathcal{R}_n$ y buscamos una corrección $\Delta : [0, \rho) \to \mathbb{R}^2$ de $\mathcal{K}_n$, analítica en $(0, \rho)$, tales que $K = \mathcal{K}_n + \Delta$, $R = \mathcal{R}_n$ satisfagan

$$F \circ (\mathcal{K}_n + \Delta) = (\mathcal{K}_n + \Delta) \circ R.$$

- Definimos un operator, $\mathcal{T}_{n,F}$, asociado con F, $\mathcal{K}_n$ y R que permite escribir esta ecuación como

$$\Delta = \mathcal{T}_{n,F}(\Delta),$$

y aplicamos el teorema del punto fijo de Banach para obtener la solución.

- Hay que calcular $\mathcal{K}_n$ con n suficientemente grande para que $\mathcal{T}_{n,F}$ sea contractivo.

Una idea de la demostración (caso diferenciable)

- Partiendo de aproximaciones analíticas K y R, buscamos $\Delta \in C^r(0, \rho)$ que satisfaga

$$F \circ (K + \Delta) = (K + \Delta) \circ R. \tag{2}$$

- Reescribimos (2) y la derivamos formalmente r veces obteniendo $r + 1$ ecuaciones para $\Delta, \ldots, D^r\Delta$.

- Definiendo operadores $\mathcal{T}_{L,F}$, este conjunto de ecuaciones se puede escribir como

$$D^L\Delta = \mathcal{T}_{L,F}(\Delta, \ldots, D^L\Delta) \qquad L \in \{0, \ldots, r\}. \tag{3}$$

- Por el teorema del punto fijo de Banach, $\mathcal{T}_{0,F}$ tiene un punto fijo, $\Delta^\infty \in C^0(0, \rho)$, que es solución de (3).

- Aplicando el teorema de contracción sobre las fibras demostramos inductivamente que $\Delta^\infty \in C^L(0, \rho)$, y por lo tanto $\Delta^\infty \in C^r(0, \rho)$.

Una idea de la demostración (caso diferenciable)

- Partiendo de aproximaciones analíticas K y R, buscamos $\Delta \in C^r(0, \rho)$ que satisfaga

$$F \circ (K + \Delta) = (K + \Delta) \circ R. \tag{2}$$

- Reescribimos (2) y la derivamos formalmente r veces obteniendo $r + 1$ ecuaciones para $\Delta, \ldots, D^r\Delta$.

- Definiendo operadores $\mathcal{T}_{L,F}$, este conjunto de ecuaciones se puede escribir como

$$D^L\Delta = \mathcal{T}_{L,F}(\Delta, \ldots, D^L\Delta) \qquad L \in \{0, \ldots, r\}. \tag{3}$$

- Por el teorema del punto fijo de Banach, $\mathcal{T}_{0,F}$ tiene un punto fijo, $\Delta^\infty \in C^0(0, \rho)$, que es solución de (3).

- Aplicando el teorema de contracción sobre las fibras demostramos inductivamente que $\Delta^\infty \in C^L(0, \rho)$, y por lo tanto $\Delta^\infty \in C^r(0, \rho)$.

Una idea de la demostración (caso diferenciable)

- Partiendo de aproximaciones analíticas K y R, buscamos $\Delta \in C^r(0, \rho)$ que satisfaga

$$F \circ (K + \Delta) = (K + \Delta) \circ R. \tag{2}$$

- Reescribimos (2) y la derivamos formalmente r veces obteniendo $r + 1$ ecuaciones para $\Delta, \ldots, D^r\Delta$.

- Definiendo operadores $\mathcal{T}_{L,F}$, este conjunto de ecuaciones se puede escribir como

$$D^L\Delta = \mathcal{T}_{L,\,F}(\Delta,\, \ldots,\, D^L\Delta) \qquad L \in \{0, \ldots, r\}. \tag{3}$$

- Por el teorema del punto fijo de Banach, $\mathcal{T}_{0,F}$ tiene un punto fijo, $\Delta^\infty \in C^0(0, \rho)$, que es solución de (3).

- Aplicando el teorema de contracción sobre las fibras demostramos inductivamente que $\Delta^\infty \in C^L(0, \rho)$, y por lo tanto $\Delta^\infty \in C^r(0, \rho)$.

Una idea de la demostración (caso diferenciable)

- Partiendo de aproximaciones analíticas K y R, buscamos $\Delta \in C^r(0, \rho)$ que satisfaga

$$F \circ (K + \Delta) = (K + \Delta) \circ R. \tag{2}$$

- Reescribimos (2) y la derivamos formalmente r veces obteniendo $r + 1$ ecuaciones para $\Delta, \dots, D^r\Delta$.

- Definiendo operadores $\mathcal{T}_{L,F}$, este conjunto de ecuaciones se puede escribir como

$$D^L\Delta = \mathcal{T}_{L,F}(\Delta, \dots, D^L\Delta) \qquad L \in \{0, \dots, r\}. \tag{3}$$

- Por el teorema del punto fijo de Banach, $\mathcal{T}_{0,F}$ tiene un punto fijo, $\Delta^\infty \in C^0(0, \rho)$, que es solución de (3).

- Aplicando el teorema de contracción sobre las fibras demostramos inductivamente que $\Delta^\infty \in C^L(0, \rho)$, y por lo tanto $\Delta^\infty \in C^r(0, \rho)$.

Una idea de la demostración (caso diferenciable)

- Partiendo de aproximaciones analíticas K y R, buscamos $\Delta \in C^r(0, \rho)$ que satisfaga
$$F \circ (K + \Delta) = (K + \Delta) \circ R. \tag{2}$$
- Reescribimos (2) y la derivamos formalmente r veces obteniendo $r + 1$ ecuaciones para $\Delta, \dots, D^r\Delta$.
- Definiendo operadores $\mathcal{T}_{L,F}$, este conjunto de ecuaciones se puede escribir como
$$D^L\Delta = \mathcal{T}_{L,\,F}(\Delta,\, \dots,\, D^L\Delta) \qquad L \in \{0, \dots, r\}. \tag{3}$$
- Por el teorema del punto fijo de Banach, $\mathcal{T}_{0,F}$ tiene un punto fijo, $\Delta^\infty \in C^0(0, \rho)$, que es solución de (3).
- Aplicando el teorema de contracción sobre las fibras demostramos inductivamente que $\Delta^\infty \in C^L(0, \rho)$, y por lo tanto $\Delta^\infty \in C^r(0, \rho)$.

• Si $a_k > 0$, existen una curva estable y una inestable tan regulares como F. Además estas curvas son únicas (Fontich, '99).

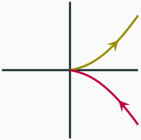

Figura 2: Curvas invariantes de F para $a_k > 0$.

• La dinámica dentro de estas curvas es $R(t) = t + R_k t^k + R_{2k-1} t^{2k-1}$, que es la forma normal de un sistema 1-dimensional alrededor de un punto parabólico (Chen, '68 y Takens, '73).

- No se puede esperar que una curva invariante sea tan regular como F alrededor de 0. Este es un fenómeno conocido para puntos parabólicos.

- El dominio de la curva invariante local $K : [0, \rho) \to \mathbb{R}^2$ se puede extender usando la fórmula

$$K(t) = F^{-j} K(R^j(t)), \qquad j \geq 1.$$

- Sea $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un entorno de 0. Consideramos aplicaciones $F : U \times \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^d$ de la forma

$$F : \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x + c(\theta)y \\ y + a_k(\theta)x^k + O(\|(x,y)\|^k) \\ \theta + \omega + d_p(\theta)x^p + O(\|(x,y)\|^p) \end{pmatrix},$$

con $k \geq 2$, $p \geq 1$.

- El toro $\mathbb{T}^d = \{x = y = 0\}$ es invariante, y F restringida a $\mathbb{T}^d$ es una rotación de frecuencia ω.

- Toro parabólico con parte nilpotente: la primera caja 2×2 de $DF(0,0,\theta)$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & c(\theta) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Buscamos variedades invariantes $K(t,\theta)$, $t \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{T}^d$, con $K(0,\theta) = \mathbb{T}^d$.

- Sea $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un entorno de 0. Consideramos aplicaciones $F : U \times \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^d$ de la forma

$$F : \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x + c(\theta)y \\ y + a_k(\theta)x^k + O(\|(x,y)\|^k) \\ \theta + \omega + d_p(\theta)x^p + O(\|(x,y)\|^p) \end{pmatrix},$$

con $k \geq 2$, $p \geq 1$.

- El toro $\mathbb{T}^d = \{x = y = 0\}$ es invariante, y F restringida a $\mathbb{T}^d$ es una rotación de frecuencia ω.

- Toro parabólico con parte nilpotente: la primera caja 2×2 de $DF(0,0,\theta)$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & c(\theta) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Buscamos variedades invariantes $K(t,\theta)$, $t \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{T}^d$, con $K(0,\theta) = \mathbb{T}^d$.

Teorema

Sea F de la forma anterior, analítica, y sean $\hat{K}$, $\hat{R}$ funciones analíticas de la forma

$$\hat{K}(t,\theta) = (O(t^2), O(t^{k+1}), \theta + O(t^{2p})), \qquad \hat{R}(t,\theta) = \begin{pmatrix} t + \bar{R}^x_k t^k + O(t^{k+1}) \\ \theta + \omega + \bar{R}^\theta_{2p} t^{2p} + O(t^{2p+1}) \end{pmatrix},$$

con $\bar{R}^x_k$, $\bar{R}^\theta_{2p} < 0$, tales que

$$F(\hat{K}(t,\theta)) - \hat{K}(\hat{R}(t,\theta)) = (O(t^{n+k}), O(t^{n+2k-1}),\ O(t^{n+2p-1})), \quad n \geq 2.$$

Entonces existe una función $K : [0,\rho) \times \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^d$, analítica en $(0,\rho) \times \mathbb{T}^d$, y una función analítica $R : (-\rho,\rho) \times \mathbb{T}^d \to \mathbb{R} \times \mathbb{T}^d$ tales que

$$F(K(t,\theta)) = K(R(t,\theta)), \qquad (t,\theta) \in [0,\rho) \times \mathbb{T}^d,$$

y

$$K(t,\theta) - \hat{K}(t,\theta) = (O(t^{n+1}), O(t^{n+k}),\ O(t^{n+2p-k})),$$
$$R(t,\theta) - \hat{R}(t,\theta) = (O(t^{2k-1}), O(t^{n+2p-1})).$$

- K es una variedad invariante analítica de F de dimensión $d+1$.

Proposición

Sea F en la forma anterior con $\bar{a}_k > 0$ y ω diofántica. Entonces, para $n \geq 2$, existen funciones $\mathcal{K}_n : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^d$ y $\mathcal{R}_n : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^d \to \mathbb{R} \times \mathbb{T}^d$, de la forma

$$\mathcal{K}_n(t,\theta) = \begin{pmatrix} t^2 + \sum_{i=3}^{n} \bar{K}_i^x t^i + \sum_{i=k+1}^{n+k-1} \tilde{K}_i^x(\theta) t^i \\ \sum_{i=k+1}^{n+k-1} \bar{K}_i^y t^i + \sum_{i=2k}^{n+2k-2} \tilde{K}_i^y(\theta) t^i \\ \theta + \sum_{i=2p}^{n+2p-2} \tilde{K}_i^\theta(\theta) t^i \end{pmatrix},$$

y

$$\mathcal{R}_n(t,\theta) = \begin{pmatrix} t + \bar{R}_k^x t^k + \bar{R}_{2k-1}^x t^{2k-1} \\ \theta + \omega + \bar{R}_{2p}^\theta t^{2p} + \cdots + \bar{R}_{n+2p-2}^\theta t^{n+2p-2} \end{pmatrix},$$

tales que

$$F(\mathcal{K}_n(t,\theta)) - \mathcal{K}_n(\mathcal{R}_n(t,\theta)) = (O(t^{n+k}),\ O(t^{n+2k-1}),\ O(t^{n+2p-1})).$$

- Las parametrizaciones de $\mathcal{K}_n$ y $\mathcal{R}_n$ son polinomios en t. Los coeficientes son constantes o funciones casiperiódicas de θ con media nula.

Observaciones

- Los coeficientes de $\mathcal{K}_n$ y $\mathcal{R}_n$ se calculan inductivamente. Obtenemos un algoritmo para calcular $\mathcal{K}_n$ y $\mathcal{R}_n$ para cualquier n.

- En el proceso encontramos ecuaciones de pequeños divisores,

$$\varphi(\theta + \omega) - \varphi(\theta) = h(\theta).$$

Si ω es diofántica la ecuación tiene solución.

- La primera componente de $\mathcal{R}_n$ correspone a la dinámica en la dirección normal a $\mathbb{T}^d$, y es $R(t, \theta) = R(t) = t + R_k t^k + R_{2k-1} t^{2k-1}$ (forma normal de Chen y Takens).

- Al igual que en el caso plano, la variedad invariante no es analítica alrededor de $\mathbb{T}^d$.

Observaciones

- Los coeficientes de $\mathcal{K}_n$ y $\mathcal{R}_n$ se calculan inductivamente. Obtenemos un algoritmo para calcular $\mathcal{K}_n$ y $\mathcal{R}_n$ para cualquier n.

- En el proceso encontramos ecuaciones de pequeños divisores,

$$\varphi(\theta + \omega) - \varphi(\theta) = h(\theta).$$

Si ω es diofántica la ecuación tiene solución.

- La primera componente de $\mathcal{R}_n$ correspone a la dinámica en la dirección normal a $\mathbb{T}^d$, y es $R(t,\theta) = R(t) = t + R_k t^k + R_{2k-1} t^{2k-1}$ (forma normal de Chen y Takens).

- Al igual que en el caso plano, la variedad invariante no es analítica alrededor de $\mathbb{T}^d$.

Observaciones

- Los coeficientes de $\mathcal{K}_n$ y $\mathcal{R}_n$ se calculan inductivamente. Obtenemos un algoritmo para calcular $\mathcal{K}_n$ y $\mathcal{R}_n$ para cualquier n.

- En el proceso encontramos ecuaciones de pequeños divisores,

$$\varphi(\theta+\omega)-\varphi(\theta)=h(\theta).$$

Si ω es diofántica la ecuación tiene solución.

- La primera componente de $\mathcal{R}_n$ correspone a la dinámica en la dirección normal a $\mathbb{T}^d$, y es $R(t,\theta)=R(t)=t+R_k t^k+R_{2k-1}t^{2k-1}$ (forma normal de Chen y Takens).

- Al igual que en el caso plano, la variedad invariante no es analítica alrededor de $\mathbb{T}^d$.

Observaciones

- Los coeficientes de $\mathcal{K}_n$ y $\mathcal{R}_n$ se calculan inductivamente. Obtenemos un algoritmo para calcular $\mathcal{K}_n$ y $\mathcal{R}_n$ para cualquier n.

- En el proceso encontramos ecuaciones de pequeños divisores,

$$\varphi(\theta + \omega) - \varphi(\theta) = h(\theta).$$

Si ω es diofántica la ecuación tiene solución.

- La primera componente de $\mathcal{R}_n$ correspone a la dinámica en la dirección normal a $\mathbb{T}^d$, y es $R(t, \theta) = R(t) = t + R_k t^k + R_{2k-1} t^{2k-1}$ (forma normal de Chen y Takens).

- Al igual que en el caso plano, la variedad invariante no es analítica alrededor de $\mathbb{T}^d$.

Algunas referencias

- I. Baldomá and E. Fontich, Stable manifolds associated to fixed points with linear part equal to identity, *J. Differential Equations* **197** (2004), no. 1, 45-72.
- I Baldomá, E. Fontich and P. Martín, Whiskered parabolic tori in the planar $(n+1)$-body problem, *Commun. Math. Phys.* **374** (2020), 63-110.
- X. Cabré, E. Fontich and R. de la Llave, The parameterization method for invariant manifolds III: overview and applications, *J. Differential Equations* **218** (2005), no. 2, 444–515.
- C. Cufí-Cabré and E. Fontich, Differentiable invariant manifolds of nilpotent parabolic points, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **41** (2021), no. 10, 4667-4704.

Muchas gracias por vuestra atención!

- I. Baldomá and E. Fontich, Stable manifolds associated to fixed points with linear part equal to identity, *J. Differential Equations* **197** (2004), no. 1, 45-72.
- I Baldomá, E. Fontich and P. Martín, Whiskered parabolic tori in the planar $(n+1)$-body problem, *Commun. Math. Phys.* **374** (2020), 63-110.
- X. Cabré, E. Fontich and R. de la Llave, The parameterization method for invariant manifolds III: overview and applications, *J. Differential Equations* **218** (2005), no. 2, 444–515.
- C. Cufí-Cabré and E. Fontich, Differentiable invariant manifolds of nilpotent parabolic points, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **41** (2021), no. 10, 4667-4704.

Muchas gracias por vuestra atención!