Problema del centro infinitesimal en 0-ciclos

A.Álvarez, J.L.Bravo, C.Christopher, P.Mardešić

UNIÓN EUROPEA
FONDO EUROPEO DE DESARROLLO REGIONAL
"Una manera de hacer Europa"

GOBIERNO DE EXTREMADURA

Partially supported by the Junta de Extremadura/FEDER grants numbers GR18023 and IB18023.

Problema del centro tangencial e infinitesimal

Fijemos el sistema polinomial hamiltoniano

$$dF = 0$$

y una familia continua de 1-ciclos, C, a la que denominaremos **centro**.

Consideremos una deformación de la forma

$$dF + \epsilon\omega = 0,$$

donde ω is una 1-forma polinomial.

Problema (Problema del centro infinitesimal)

Obtener todas las deformaciones ω que preservan el centro.

Resuelto en el caso de F ultra Morse [Ilyashenko 69] cuando el grado de ω es menor que el de F.

Problema del centro tangencial e infinitesimal

Fijemos una sección transversal a la familia $C(z)$, parametrizada por los valores de F y consideremos su deformación $C_\epsilon(z)$ por la deformación $dF + \epsilon\omega = 0$.

Definimos la **aplicación desplazamiento** Δ como

$$\Delta(z,\epsilon) = \int_{C_\epsilon(z)} dF = -\epsilon \int_{C_\epsilon(z)} \omega.$$

Tendremos un centro infinitesimal si $\Delta(z,\epsilon) \equiv 0$.

Problema (Centro tangencial)

Deteminar cuando a primer orden respecto de ϵ, Δ es idénticamente nula.

Resuelto en el caso de F ultra Morse [Ilyashenko 69].

Sea $p \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio de grado m y Σ el conjunto de sus valores críticos. Tenemos

$$p\colon \mathbb{C} \backslash f^{-1}(\Sigma) \to \mathbb{C} \backslash \Sigma$$

Cada fibra de $p^{-1}(t)$ consiste en m raíces $z_1(t), \ldots, z_m(t)$ de $p(z) = t$.

Fijado $t_0 \in \mathbb{C} \backslash \Sigma$ y $(n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{Z}^m$, consideramos un divisor

$$C(t_0) = \sum_{i=1}^{m} n_i z_i(t_0).$$

Esta familia se puede extender para $t \in \mathbb{C} \backslash \Sigma$.

Diremos que $C(t)$ es una (familia de) 0-ciclos si

$$\sum_{i=1}^{m} n_i = 0.$$

Consideremos ahora una deformación polinomial

$$p(z) + \epsilon q(z) = t,$$

y el 0-ciclo inducido

$$C_\epsilon(t) = \sum_{i=1}^{m} n_i z_i(t, \epsilon),$$

donde

$$(p + \epsilon q)(z_i(t, \epsilon)) = t, \quad z_i(t, 0) = z_i(t).$$

La aplicación desplazamiento, Δ, de $p+\epsilon q$ sobre el ciclo C se define como

$$\Delta(t,\epsilon)=\int_{C_\epsilon(t)} p,$$

donde

$$\int_{C_\epsilon(t)} p=\sum_{i=1}^{m} n_i p(z_i(\epsilon,t)).$$

Como $\sum_{i=1}^{m} n_i = 0$,

$$\Delta(t,\epsilon)=\int_{C_\epsilon(t)} p=-\epsilon\int_{C_\epsilon(t)} q.$$

Problema (Problema del centro infinitesimal sobre 0-ciclos)

Determinar los polinomios p, ciclos C y deformaciones q tales que la aplicación desplazamiento es identicamente nula.

Problema (Problema del centro infinitesimal sobre 0-ciclos)

Determinar los polinomios p, ciclos C y deformaciones q tales que la aplicación desplazamiento es identicamente nula.

Si desarrollamos Δ respecto de ϵ,

$$\Delta(t,\epsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i M_i(t).$$

Denominamos $M_i(t)$ la i-ésima función de Melnikov. Se puede comprobar que

$$M_1(t) = -\int_{C(t)} q = \sum_{i=1}^{m} n_i q(z_i(t)).$$

Problema (Problema del centro tangencial sobre 0-ciclos)

Determinar los polinomios p, ciclos C y deformaciones q tales que la primera función de Melnikov es identicamente nula.

En [Gavrilov-Movasati 2007] se obtuvo la solución de este problema para un caso particular.

La solución completa al problema del centro tangencial se ha obtenido en [Álvarez-B.-Mardešić 2013] (bajo una condición genérica) y en [Gavrilov-Pakovich 2014].

Supongamos que existen $h, \tilde{p}, \tilde{q} \in \mathbb{C}[z]$ tales que $p(z) = \tilde{p}(h(z))$, $q(z) = \tilde{q}(h(z))$.

Dado un ciclo $C_\epsilon(t) = \sum_{i=1}^{m} n_i z_i(t,\epsilon)$ definimos su proyección por h como el ciclo de $\tilde{p} + \epsilon\tilde{q}$ definido por

$$h(C_\epsilon(t)) = \sum_{h(z_i(t))} \left(\sum_{h(z_j)=h(z_i)} n_j \right) h(z_i(t,\epsilon)).$$

Decimos que un ciclo proyectado es trivial si

$$\sum_{h(z_j)=h(z_i)} n_j = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Definición

Decimos que $p, q \in \mathbb{C}[z]$ *y un ciclo* C *de* p *verifica la condición de composición, si existen polinomios* $\tilde{p}, \tilde{q}, h \in \mathbb{C}[z]$ *tales que*

$$p(z) = \tilde{p}(h(z)), \quad q(z) = \tilde{q}(h(z)),$$

y para cada ϵ*, el ciclo* C_ϵ *proyectado por* h *es trivial, es decir,*

$$\sum_{h(z_j(t,\epsilon))=h(z_i(t,\epsilon))} n_j = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Teorema

Una deformación $p + \epsilon q$ tiene un centro infinitesimal para un 0-ciclo C de p, i.e.,

$$\Delta(t,\epsilon) \equiv 0, \quad \textit{para todo } t \in \mathbb{C}, \epsilon \textit{ suf. pequeño},$$

si y sólo si p, q, C verifican la condición de composición.

La suficiencia de la condición es sencilla:

$$\Delta(t,\epsilon) = \sum_{j=1}^{m} n_j p(z_j(t,\epsilon)) = \sum_{j=1}^{m} n_j \tilde{p}(h(z_j(t,\epsilon))) = \int_{h(C_\epsilon)} \tilde{p} \equiv 0.$$

Consideremos $p(z) = z^4$, una perturbación de la forma $q(x) = az^4 + bz^2 + c$, y un ciclo genérico

$$C(t) = \sum_{j=0}^{3} n_j z_j(t), \quad z_j(1) = i^j, \quad \sum_{j=0}^{3} n_j = 0.$$

Las raíces de $p(z) + \epsilon q(z) = t$ son

$$z_j(t,\epsilon) = (-1)^{\lfloor j/2 \rfloor} \sqrt{\frac{-\epsilon b + (-1)^j \sqrt{\epsilon^2 b^2 - 4(\epsilon c - t)(1+\epsilon a)}}{2(1+\epsilon a)}}.$$

Queremos encontrar $a, b, c,\ n_0, n_1, n_2, n_3$ tales que

$$\Delta_\epsilon(t) = \sum_{j=0}^{3} z_j(t,\epsilon) = 0, \quad \text{para todo } t, \epsilon.$$

Ejemplo 1

En este caso,

$$\Delta_\epsilon(t) = \frac{\epsilon b(-n_0 + n_1 - n_2 + n_3)\sqrt{\epsilon^2 b^2 - 4(\epsilon c - t)(1+\epsilon a)}}{2(1+\epsilon a)^2}.$$

Luego se ha de cumplir una de las siguientes condiciones:

1. $b = 0$
2. $n_1 + n_3 = n_0 + n_2$

Si se cumple la primera, tenemos $q(z) = ap(z) + c$.

Si se cumple la segunda, y $h(z) = z^2$, entonces

$$p(z) = h^2(z), \quad q(z) = ah^2(z) + bh(z) + c.$$

Además, $n_2 + n_0 = 0$ y $n_1 + n_3 = 0$. Luego la proyección de C_ϵ por h es trivial.

Ejemplo 2

Consideremos $p(z) = z^6$, y el ciclo

$$C(t) = \sum_{j=0}^{5} n_j z_j(t), \quad z_j(t) = t^{\frac{1}{6}} e^{j\frac{2\pi i}{6}},$$

con $n_0 = 2,\ n_1 = 1,\ n_2 = -1,\ n_3 = -2,\ n_4 = -1,\ n_5 = 1.$

El polinomio p admite dos descomposiciones:

$$p(z) = h_1^2(z) = h_2^3(z), \quad h_1(z) = z^3,\ h_2(z) = z^2.$$

La proyección de $C(t)$ por h_1 (h_2) es trivial

$$h_1(C(t)) = (n_0 + n_2 + n_4)t^{1/2} + (n_1 + n_3 + n_5)(-t^{1/2}) = 0.$$

Ejemplo 2

Consideremos la perturbación

$$q(x) = z^3 + z^2 = h_1(z) + h_2(z).$$

Recordemos que

$$\Delta_\epsilon(t) = -\epsilon \int_{C(t)} q + O(\epsilon^2).$$

Entonces

$$\int_{C(t)} q = \int_{C(t)} h_1 + h_2 = \int_{C(t)} h_1 + \int_{C(t)} h_2 = \int_{h_1(C(t))} z + \int_{h_2(C(t))} z = 0.$$

Por tanto es un centro tangencial.

Por otra parte, se puede comprobar que

$$M_2(t) = -\frac{17}{12t} \neq 0.$$

Luego no es un centro infinitesimal.

Dado un polinomio p de grado m, denotamos Σ el conjunto de valores críticos.

Si $t \in \mathbb{C} \backslash \Sigma$, entonces $p^{-1}(t)$ consiste en m puntos distintos

$$z_1(t), \ldots, z_m(t).$$

Por prolongación analítica, podemos extender los puntos anteriores a funciones multivaluadas.

Si analíticamente a lo largo de lazos obtenemos un grupo de permutaciones, al que denominamos grupo de monodromía de p.

Dicho grupo coincide con el grupo de Galois de $p(z) - t$,

$$G_f = \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}(t)} \mathbb{C}(z_1, \ldots, z_m).$$

Para definir el grupo de monodromía de $p+\epsilon q$ consideramos la aplicación

$$\begin{array}{rccl} H: & \mathbb{CP}\times\mathbb{C} & \to & \mathbb{CP}\times\mathbb{C} \\ & (z,\epsilon) & \mapsto & H(z,\epsilon)=(p(z)+\epsilon q(z),\epsilon). \end{array}$$

Si $D(t,\epsilon)$ es el discriminante de $p(z)+\epsilon q(z)-t$ como polinomio en z y $c(\epsilon)$ el coeficiente del monomio de mayor grado, definimos

$$\Sigma := \{(t,\epsilon)\in\mathbb{C}^2 : c(\epsilon)D(t,\epsilon)=0\}\cup\{\infty\}\times\mathbb{C}.$$

Considerando lazos en $\mathbb{CP}\times\mathbb{C}\setminus\Sigma$ partiendo de un punto (t_0,ϵ_0) definimos el grupo de monodromía G.

Esquema de la demostración

Fijado ϵ tenemos el grupo de monodromía de $p + \epsilon q$, que denotamos G_ϵ.

Proposición

Dado un camino cerrado γ en $\mathbb{CP} \times \mathbb{C} \setminus \Sigma$ y $\epsilon_0 \in \mathbb{C} \setminus p_2(\Sigma_0)$, γ es homotópico en $\mathbb{CP} \times \mathbb{C} \setminus \Sigma$ a un camino cerrado en $(\mathbb{C} \setminus \Sigma_{\epsilon_0}) \times \{\epsilon_0\}$, donde Σ_{ϵ_0} es el conjunto de valores críticos de $p(z) + \epsilon_0\, q(z)$.

Corolario

Para cada $\epsilon \in \mathbb{C}$ tal que $c(\epsilon) \neq 0$, G_ϵ es un subgrupo de G, salvo conjugación, y para todo $\epsilon \notin p_2(\Sigma_0)$, G_ϵ es congujado a G. Además, G es el grupo de Galois de la extensión de $\mathbb{C}(t, \epsilon)$ por las preimágenes $z_1(t, \epsilon), \ldots, z_n(t, \epsilon)$.

La demostración sigue ahora de modo similar a [Christopher-Mardešić 2010].
Aplicamos Burnside-Schur para probar que se verifica uno de los siguientes casos

1. G es dos transitivo.
2. G es isomorfo al grupo de monodromía de z^p con p primo.
3. G es isomorfo al grupo de monodromía de $T_p(z)$ con p primo.
4. G es imprimitivo.

Para cada caso, probamos la conjetura de composión.

¡Muchas gracias!