

Algunos aspectos sobre la dinámica de ciertas familias de sistemas Kolmogorov

Érika Diz Pita

9 de septiembre de 2021



FACULTEDE DE MATEMÁTICAS

Algunos aspectos sobre la dinámica de ciertas familias de sistemas Kolmogorov

- 1 Clasificación topológica de los retratos de fases de algunas familias de sistemas Kolmogorov en \mathbb{R}^2
- 2 Existencia de ciclos limite en sistemas Kolmogorov en \mathbb{R}^3
- 3 Aplicaciones

1. Clasificación topológica de los retratos de fases de algunas familias de sistemas Kolmogorov en \mathbb{R}^2

Objetivo inicial

Estudiar los sistemas Lotka-Volterra en dimensión tres

$$\dot{x} = x(a_0 + a_1x + a_2y + a_3z),$$

$$\dot{y} = y(b_0 + b_1x + b_2y + b_3z),$$

$$\dot{z} = z(c_0 + c_1x + c_2y + c_3z),$$

que tienen una integral primera racional de grado dos $x^{\lambda_1}y^{\lambda_2}z^{\lambda_3}$.

1. Clasificación topológica de los retratos de fases de algunas familias de sistemas Kolmogorov en \mathbb{R}^2

Objetivo inicial

Estudiar los sistemas Lotka-Volterra en dimensión tres

$$\dot{x} = x(a_0 + a_1x + a_2y + a_3z),$$

$$\dot{y} = y(b_0 + b_1x + b_2y + b_3z),$$

$$\dot{z} = z(c_0 + c_1x + c_2y + c_3z),$$

que tienen una integral primera racional de grado dos $x^{\lambda_1}y^{\lambda_2}z^{\lambda_3}$.

Primer paso. Aplicamos la teoría de integrabilidad de Darboux para caracterizarlos.

Teoría de la integrabilidad de Darboux

Teorema de integrabilidad de Darboux para sistemas polinomiales

Supongamos que el sistema polinomial

$$\dot{x} = P(x, y, z), \quad \dot{y} = Q(x, y, z), \quad \dot{z} = R(x, y, z).$$

de grado m admite p curvas algebraicas irreducibles invariantes $f_i = 0$ con cofactores K_i para $i = 1, \dots, p$. Entonces se verifica:

- ❶ Existen $\lambda_i \in \mathbb{C}$ no todos cero tales que $\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i = 0$ si y solo si la función $f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p}$ es una integral primera del sistema.
- ❷ Existen $\lambda_i \in \mathbb{C}$ no todos cero tales que $\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i = -s$ para algún $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ si y solo si la función $f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} \exp(st)$ es un invariante del sistema.

Caracterización de los sistemas Lotka-Volterra espaciales

El estudio de los sistemas Lotka-Volterra anteriores, resulta equivalente al estudio de las siguientes familias de **sistemas Kolmogorov en el plano**:

$$\dot{x} = x(a_0 + a_1x + a_2z^2 + a_3z),$$

$$\dot{z} = z(c_0 + c_1x + c_2z^2 + c_3z),$$

$$\dot{y} = y(b_0 + b_1yz + b_2y + b_3z),$$

$$\dot{z} = z(c_0 + c_1yz + c_2y + c_3z),$$

que dependen cada una de 8 parámetros.

Familias Kolmogorov con un invariante de Darboux

El estudio de estas familia Kolmogorov se ha realizado bajo la suposición de que existe un **invariante de Darboux** de la forma $e^{st} x^{\lambda_1} z^{\lambda_2}$ para la primera familia y de la forma $e^{st} y^{\lambda_1} z^{\lambda_2}$ para la segunda.

Bajo estas condiciones su estudio es equivalente al de las familias

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(a_0 - \mu(c_1x + c_2z^2 + c_3z)), \\ \dot{z} &= z(c_0 + c_1x + c_2z^2 + c_3z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y(b_0 + b_1yz + b_2y + b_3z), \\ \dot{z} &= z(c_0 - \mu(b_1yz + b_2y + b_3z)),\end{aligned}$$

que dependen cada una de 6 parámetros.

Primer sistema Kolmogorov

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(a_0 - \mu(c_1x + c_2z^2 + c_3z)), \\ \dot{z} &= z(c_0 + c_1x + c_2z^2 + c_3z)\end{aligned}\tag{1}$$

Clasificación topológica de todos los posibles retratos de fase globales en el disco de Poincaré.

Primer sistema Kolmogorov

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(a_0 - \mu(c_1x + c_2z^2 + c_3z)), \\ \dot{z} &= z(c_0 + c_1x + c_2z^2 + c_3z)\end{aligned}\tag{1}$$

Clasificación topológica de todos los posibles retratos de fase globales en el disco de Poincaré.

- Si $\mu \neq -1$ todas las singularidades del sistema son aisladas.



Diz-Pita, E., Llibre, J. & Otero-Espinar, M. V. "Phase portraits of a family of Kolmogorov systems depending on six parameters," *Electron. J. Differ. Eq.* **2021**, 1–38.

Primer sistema Kolmogorov

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(a_0 - \mu(c_1x + c_2z^2 + c_3z)), \\ \dot{z} &= z(c_0 + c_1x + c_2z^2 + c_3z)\end{aligned}\tag{1}$$

Clasificación topológica de todos los posibles retratos de fase globales en el disco de Poincaré.

- Si $\mu \neq -1$ todas las singularidades del sistema son aisladas.



Diz-Pita, E., Llibre, J. & Otero-Espinar, M. V. "Phase portraits of a family of Kolmogorov systems depending on six parameters," *Electron. J. Differ. Eq.* **2021**, 1–38.

- Si $\mu = -1$ todos los puntos del infinito son singularidades, formando un continuo.



Diz-Pita, E., Llibre, J. & Otero-Espinar, M. V. "Phase portraits of a family of Kolmogorov systems with infinitely many singular points at infinity," *Accepted in Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*

Primer sistema Kolmogorov con $\mu \neq -1$

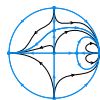
Teorema

Los sistemas Kolmogorov (1) tienen 78 retratos de fase topológicamente distintos en el disco de Poincaré.

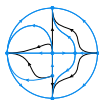
Primer sistema Kolmogorov con $\mu \neq -1$

Teorema

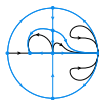
Los sistemas Kolmogorov (1) tienen 78 retratos de fase topológicamente distintos en el disco de Poincaré.



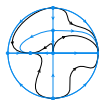
(R1)



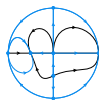
(R2)



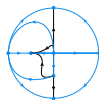
(R3)



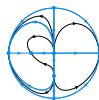
(R4)



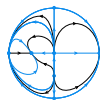
(R5)



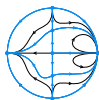
(R6)



(R7)



(R8)



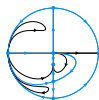
(R9)



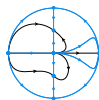
(R10)



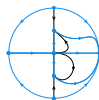
(R11)



(R12)



(R13)





(R14)

Primer sistema Kolmogorov con $\mu \neq -1$

Teorema

Los sistemas Kolmogorov (1) tienen 78 retratos de fase topológicamente distintos en el disco de Poincaré.

Demostración

- Estudio de simetrías.
- Compactificación de Poincaré.
- Estudio local de las singularidades:
 - ▶ Th. singularidades no degeneradas, Th. singularidades semihiperbólicas.
 -  F. Dumortier, J. Llibre, J.C. Artés, *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*, UniversiText, Springer-Verlag, New York, 2006.
 - ▶ Blow up's.
 -  M. J. Álvarez, A. Ferragut, X. Jarque, *A survey on the blow up technique*, *International Journal of Bifurcation and Chaos* **21**(11), 2011, 3103–3118.
- Teoría del índice.

Primer sistema Kolmogorov con $\mu \neq -1$

Teorema

Los sistemas Kolmogorov (1) tienen 78 retratos de fase topológicamente distintos en el disco de Poincaré.

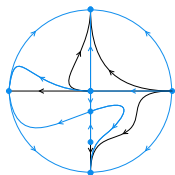
- A partir de la información local obtenemos el esqueleto de las separatrices completo (Teorema de Markus-Neumann-Peixoto).

Primer sistema Kolmogorov con $\mu \neq -1$

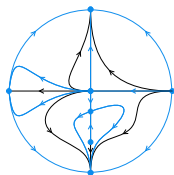
Teorema

Los sistemas Kolmogorov (1) tienen 78 retratos de fase topológicamente distintos en el disco de Poincaré.

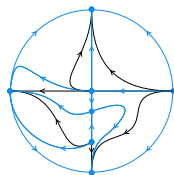
- A partir de la información local obtenemos el esqueleto de las separatrices completo (Teorema de Markus-Neumann-Peixoto).
- A partir de los retratos locales distinguimos 96 casos. En 14 de ellos se obtienen inicialmente 3 posibles retratos globales con distinta conexión de las separatrices. En todos los casos se prueba que solo uno es realizable.



Subcase 1



Subcase 2



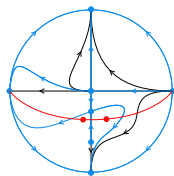
Subcase 3

Primer sistema Kolmogorov con $\mu \neq -1$

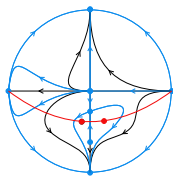
Teorema

Los sistemas Kolmogorov (1) tienen 78 retratos de fase topológicamente distintos en el disco de Poincaré.

- A partir de la información local obtenemos el esqueleto de las separatrices completo (Teorema de Markus-Neumann-Peixoto).
- A partir de los retratos locales distinguimos 96 casos. En 14 de ellos se obtienen inicialmente 3 posibles retratos globales con distinta conexión de las separatrices. En todos los casos se prueba que solo uno es realizable.



Subcase 1



Subcase 2

Primer sistema Kolmogorov con $\mu \neq -1$

Teorema

Los sistemas Kolmogorov (1) tienen 78 retratos de fase topologicamente distintos en el disco de Poincaré.

- A partir de la información local obtenemos el esqueleto de las separatrices completo (Teorema de Markus-Neumann-Peixoto).
- A partir de los retratos locales distinguimos 96 casos. En 14 de ellos se obtienen inicialmente 3 posibles retratos globales con distinta conexión de las separatrices. En todos los casos se prueba que solo uno es realizable.
- Mediante equivalencias topológicas reducimos de 96 a 78 retratos globales en el disco de Poincaré.



Primer sistema Kolmogorov con $\mu = -1$

Teorema

Los sistemas Kolmogorov

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(a_0 + c_1x + c_2z^2 + c_3z), \\ \dot{z} &= z(c_0 + c_1x + c_2z^2 + c_3z)\end{aligned}\tag{2}$$

tienen 22 retratos de fase topologicamente distintos en el disco de Poincaré.

- Necesidad de estudiar los puntos de equilibrio que forman un continuo.
 - ▶ Puntos con un autovalor no nulo.
 -  R. L. Devaney, *Collision Orbits in the Anisotropic Kepler Problem*, *Invent. Math.* **45**, 1978, 221–251.
 -  M. Hirsch, C. Pugh, M. Shub, *Invariant Manifolds*, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 583. Springer-Verlag, 1977.
 - ▶ Puntos con ambos autovalores nulos.

Segundo sistema Kolmogorov

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(a_0 - \mu(c_1x + c_2z^2 + c_3z)), \\ \dot{z} &= z(c_0 + c_1x + c_2z^2 + c_3z)\end{aligned}\tag{3}$$

Segundo sistema Kolmogorov

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(a_0 - \mu(c_1x + c_2z^2 + c_3z)), \\ \dot{z} &= z(c_0 + c_1x + c_2z^2 + c_3z)\end{aligned}\tag{3}$$

- Caso singularidades aisladas.



Diz-Pita, E., Llibre, J. & Otero-Espinar, M. V. "Planar Kolmogorov systems coming from spatial Lotka-Volterra systems," *To appear on Int. J. Bifurcation Chaos*.

Segundo sistema Kolmogorov

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(a_0 - \mu(c_1x + c_2z^2 + c_3z)), \\ \dot{z} &= z(c_0 + c_1x + c_2z^2 + c_3z)\end{aligned}\tag{3}$$

- Caso singularidades aisladas.



Diz-Pita, E., Llibre, J. & Otero-Espinar, M. V. "Planar Kolmogorov systems coming from spatial Lotka-Volterra systems," *To appear on Int. J. Bifurcation Chaos*.

- Caso con un continuo de singularidades.



Diz-Pita, E., Llibre, J. & Otero-Espinar, M. V. "Planar Kolmogorov systems with infinitely many singular points at infinity," *Submitted to Int. J. Bifurcation Chaos*.

Segundo sistema Kolmogorov con $\mu \neq -1$

Teorema

Los sistemas Kolmogorov (3) tienen 52 retratos de fase topológicamente distintos en el disco de Poincaré.

Segundo sistema Kolmogorov con $\mu \neq -1$

Teorema

Los sistemas Kolmogorov (3) tienen 52 retratos de fase topológicamente distintos en el disco de Poincaré.

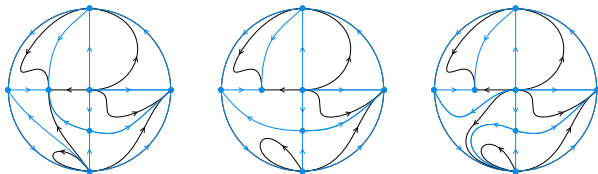
- A partir de los retratos locales distinguimos 84 casos. En 11 de ellos se obtienen 3 posibles retratos globales con distinta conexión de las separatrices.

Segundo sistema Kolmogorov con $\mu \neq -1$

Teorema

Los sistemas Kolmogorov (3) tienen 52 retratos de fase topológicamente distintos en el disco de Poincaré.

- A partir de los retratos locales distinguimos 84 casos. En 11 de ellos se obtienen 3 posibles retratos globales con distinta conexión de las separatrices.
- Todos los casos son realizables, teniendo un total de 106 retratos globales.



Segundo sistema Kolmogorov con $\mu \neq -1$

Teorema

Los sistemas Kolmogorov (3) tienen 52 retratos de fase topológicamente distintos en el disco de Poincaré.

- A partir de los retratos locales distinguimos 84 casos. En 11 de ellos se obtienen 3 posibles retratos globales con distinta conexión de las separatrices.
- Todos los casos son realizables, teniendo un total de 106 retratos globales.
- Mediante equivalencias topológicas reducimos a 52 retratos globales en el disco de Poincaré.

Segundo sistema Kolmogorov con $\mu = -1$

Teorema

Los sistemas Kolmogorov

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(a_0 c_1 x + c_2 z^2 + c_3 z), \\ \dot{z} &= z(c_0 + c_1 x + c_2 z^2 + c_3 z)\end{aligned}\tag{4}$$

tienen 13 retratos de fase topologicamente distintos en el disco de Poincaré.

2. Existencia de ciclos limite en sistemas Kolmogorov en \mathbb{R}^3

Objetivo

Estudiar los ciclos limite de los sistemas Kolmogorov de grado 3 en \mathbb{R}^3 que aparecen en una bifurcación zero-Hopf de las singularidades (a, b, c) que no están sobre los planos invariantes $x = 0$, $y = 0$ and $z = 0$.

2. Existencia de ciclos limite en sistemas Kolmogorov en \mathbb{R}^3

Objetivo

Estudiar los ciclos limite de los sistemas Kolmogorov de grado 3 en \mathbb{R}^3 que aparecen en una bifurcación zero-Hopf de las singularidades (a, b, c) que no están sobre los planos invariantes $x = 0$, $y = 0$ and $z = 0$.

- Consideramos los sistemas

$$\dot{x} = xP(x, y, z), \quad \dot{y} = yQ(x, y, z), \quad \dot{z} = zR(x, y, z),$$

con P , Q y R son polinomios de grado 2.

- Reescalando $(x, y, z) \rightarrow (x/a, y/b, z/c)$ podemos asumir $(a, b, c) = (1, 1, 1)$.

2. Existencia de ciclos limite en sistemas Kolmogorov en \mathbb{R}^3

Es suficiente estudiar los ciclos limite que bifurcan de la singularidad $(1, 1, 1)$ (cuando es Zero-Hopf) de los sistemas:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x (a_1(x-1) + a_2(y-1) + a_3(z-1) + a_4(x-1)^2 + a_5(x-1)(y-1) \\ &\quad + a_6(x-1)(z-1) + a_7(y-1)^2 + a_8(y-1)(z-1) + a_9(z-1)^2), \\ \dot{y} &= y (b_1(x-1) + b_2(y-1) + b_3(z-1) + b_4(x-1)^2 + b_5(x-1)(y-1) \\ &\quad + b_6(x-1)(z-1) + b_7(y-1)^2 + b_8(y-1)(z-1) + b_9(z-1)^2), \\ \dot{z} &= z (c_1(x-1) + c_2(y-1) + c_3(z-1) + c_4(x-1)^2 + c_5(x-1)(y-1) \\ &\quad + c_6(x-1)(z-1) + c_7(y-1)^2 + c_8(y-1)(z-1) + c_9(z-1)^2).\end{aligned}$$

Caracterización de cuando el equilibrio es Zero-Hopf

Proposición

La singularidad $(1, 1, 1)$ del sistema anterior es zero-Hopf si y solo si se verifica uno de los siguientes conjuntos de condiciones, siendo

$\gamma = a_3 b_3 (b_2 - a_1) - a_2 b_3^2 + a_3^2 b_1$ y $\beta > 0$:

(i) $\gamma \neq 0$, $c_3 = -a_1 - b_2$,

$$c_1 = \frac{1}{\gamma} (a_1^3 b_3 - a_1^2 a_3 b_1 - a_1 (a_3 b_1 b_2 - b_3 (2a_2 b_1 + \beta^2)) - b_1 (a_2 (a_3 b_1 - b_2 b_3) + a_3 (\beta^2 + b_2^2)))$$

$$c_2 = \frac{1}{\gamma} (a_1^2 a_2 b_3 + a_1 a_2 (b_2 b_3 - a_3 b_1) + a_2^2 b_1 b_3 - a_3 b_2 (\beta^2 + b_2^2) + a_2 (b_3 (\beta^2 + b_2^2) - 2a_3 b_1 b_2)).$$

(ii) $\gamma \neq 0$, $a_3 b_3 \neq 0$, $a_2 = \frac{a_3 b_2}{b_3}$, $b_1 = \frac{a_1 b_3}{a_3}$, $c_3 = -a_1 - b_2$ and

$$c_2 = -\frac{(a_1 + b_2)^2 + a_3 c_1 + \beta^2}{b_3}.$$

(iii) $\gamma \neq 0$, $b_3 \neq 0$, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, $c_2 = -\frac{b_2^2 + \beta^2}{b_3}$ and $c_3 = -b_2$.

(iv) $\gamma \neq 0$, $a_3 \neq 0$, $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, $c_1 = -\frac{a_1^2 + \beta^2}{a_3}$ and $c_3 = -a_1$.

(v) $\gamma \neq 0$, $b_1 \neq 0$, $a_2 = -\frac{a_1^2 + \beta^2}{b_1}$, $a_3 = b_3 = c_3 = 0$ and $b_2 = -a_1$.

Existencia de ciclos limite

- El caso (i) está estudiado en el trabajo:



Llibre, J., Martínez Y. P., Valls, C. “Limit cycles bifurcating of Kolmogorov systems in \mathbb{R}^2 and in \mathbb{R}^3 ”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **91**, 2021.

- En todos los casos (ii), (iii), (iv) y (v) hemos dado condiciones suficientes para la existencia de dos ciclos limite bifurcando de las singularidad Zero-Hopf.



Diz-Pita, E., Llibre, J., Otero-Espinar, M. V., Valls, C. [2021] “The zero-Hopf bifurcations in the Kolmogorov systems of degree 3 in \mathbb{R}^3 ”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **95**, 2021.

- Clasificamos los dos ciclos limite según su estabilidad.
- Empleamos el método de los promedios de primer orden.

Teorema

Si $a_3 b_3 \neq 0$, $N \neq 0$, $a_2 = a_3 b_2 / b_3$, $b_1 = a_1 b_3 / a_3$, $c_3 = -a_1 - b_2$,
 $c_2 = -((a_1 + b_2)^2 + a_3 c_1 + \beta^2) / b_3$, $A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$, $A_3 \neq 0$, y
 $A_0 A_4 (A_1 A_2 - A_0 A_3) > 0$, entonces el sistema Kolmogorov tiene dos ciclos limite
bifurcando del equilibrio zero-Hopf $(1, 1, 1)$. Además se verifica:

(a) Si $K_1 > 0$, $A_2 A_3 (A_0 A_3 - A_1 A_2) N < 0$ y $|2A_0 A_3 - A_1 A_2| < \sqrt{K_1}$, entonces
los dos ciclos limite tienen una variedad estable formada por dos cilindros y
una variedad inestable formada por dos cilindros.

(b) Si $b_3 A_2 N > 0$, $b_3 A_3 (A_0 A_3 - A_1 A_2) > 0$ y

- o bien $K_1 > 0$, $b_3 A_1 N (2A_0 A_3 - A_1 A_2 - \sqrt{K_1}) < 0$ y
 $b_3 A_1 N (2A_0 A_3 - A_1 A_2 + \sqrt{K_1}) < 0$,
- o bien $K_1 \leq 0$ y $b_3 A_1 N (2A_0 A_3 - A_1 A_2) < 0$;

o si $b_3 A_2 N < 0$, $b_3 A_3 (A_0 A_3 - A_1 A_2) < 0$ y

- o bien $K_1 > 0$, $b_3 A_1 N (2A_0 A_3 - A_1 A_2 - \sqrt{K_1}) > 0$ y
 $b_3 A_1 N (2A_0 A_3 - A_1 A_2 + \sqrt{K_1}) > 0$,
- o bien $K_1 \leq 0$ y $b_3 A_1 N (2A_0 A_3 - A_1 A_2) > 0$;

entonces un ciclo limite es un repulsor local y el otro un atractor local.

...

...

3. Aplicaciones

- Estudio de un sistema espacial con un depredador y dos presas.



R. Colucci, E. Diz-Pita, M. V. Otero-Espinar, *Dynamics of a two prey and one predator system with indirect effect*, *Mathematics* **9**, 436, **2021**.

- Estudio de los retratos de fases de un sistema depredador-presa, obtenido a partir de uno tipo Rosenzweig-MacArthur en



R. Huzak, *Predator-prey systems with small predator's death rate*, *Electron. J. Qual. Theory Differ.* **86**, 1–16, **2021**.

3. Aplicaciones

- Estudio de un sistema espacial con un depredador y dos presas.



R. Colucci, E. Diz-Pita, M. V. Otero-Espinar, *Dynamics of a two prey and one predator system with indirect effect*, *Mathematics* **9**, 436, **2021**.

- Estudio de los retratos de fases de un sistema depredador-presa, obtenido a partir de uno tipo Rosenzweig-MacArthur en



R. Huzak, *Predator-prey systems with small predator's death rate*, *Electron. J. Qual. Theory Differ.* **86**, 1–16, **2021**.

¡Gracias por vuestra atención!