

INTRODUÇÃO AOS SISTEMAS DINÂMICOS: OS EXEMPLOS BÁSICOS

MARIA JOSÉ PACIFICO

SUMÁRIO

1. Introdução	2
1.1. Plano do Curso	5
2. Aplicações do círculo	5
3. Rotações do círculo e o Teorema de Poincaré	7
3.1. O Teorema de Poincaré para homeomorfismos de S^1	11
3.2. Número de Rotação	12
4. Aplicações expansoras no intervalo	16
4.1. Conjugação e semi-conjugação	17
4.2. Expansão binária e aplicação expansora	17
4.3. A aplicação deslocamento σ	17
4.4. A dinâmica do descolamento σ	18
4.5. Itinerário de $x \in [0, 1] = I$	20
4.6. Codificando f_2	21
5. A família quadrática e hiperbolicidade	23
5.1. O caso $\mu > 4$	29
6. A ferradura de Smale	32
6.1. Codificando a ferradura	34
6.2. Ferradura na aplicação de Henón	36
7. Difeomorfismo de Anosov e o Derivado de Anosov	38
7.1. Preliminares: Anosov no toro $\mathbb{T}^2$	38
7.2. Propriedades de f_A	39
7.3. Primeira construção: seguindo Katok-Hasselblatt	40
7.4. Segunda construção-Inspirando-se em Robinson	42
7.5. Propriedades do DA-difeomorfismo	44

Estas notas foram preparadas com o auxílio imprescindível de Diego Sanhueza, Liliana Jurado e Ricardo Liberalquino, estudantes do Programa de Pós Graduação do IM-UFRJ, a quem agradeço imensamente.

8. O solenoide	49
8.1. Propriedades topológicas do Solenoide Λ	50
8.2. O solenoide é o limite inverso	52
9. O atrator de Lorenz	55
9.1. O Atrator Geométrico de Lorenz é uma classe Homoclínica	61
10. O Teorema de Hartman-Grobman	66
11. O λ -Lema (Lema da Inclinação)	69
Referências	73

1. INTRODUÇÃO

Sistemas dinâmicos é um dos ramos mais ativos da matemática atual. Envolve ferramentas e técnicas de muitas outras áreas como análise, geometria, teoria dos números, topologia e tem muitas aplicações em muitos outros campos da ciência, como física, astronomia, meteorologia, economia, biologia, entre muitas.

O adjetivo dinâmico refere-se ao fato que os sistemas que estamos interessados evoluem com o tempo. Nas aplicações, os sistemas estudados poderiam por exemplo, ser uma caixa contendo moléculas de gás em física, espécies de população em biologia, mercado financeiro e economia, correntes de ar em meteorologia.

Em matemática pura, um sistema dinâmico pode ser obtido iterando uma função ou deixando o tempo evoluir no tempo a solução de uma equação.

O sistema é dito discreto quando o tempo evolui em unidades discretas. Por exemplo, podemos analisar o crescimento populacional de ano em ano. Neste caso, o tempo é parametrizado por uma variável discreta n que assume valores inteiros. O conjunto dos números inteiros naturais será denotado por $\mathbb{N}$ e o conjunto dos números inteiros será denotado por $\mathbb{Z}$.

Em um sistema dinâmico contínuo a variável tempo muda continuamente e é dada por um número real t . Denotamos o conjunto dos números reais por $\mathbb{R}$.

Os exemplos principais de sistema dinâmico discreto neste curso será obtido por iteração de uma função definida em um espaço X . Por exemplo, X pode ser o intervalo unitário $[0, 1]$ ou o quadrado unitário $[0, 1] \times [0, 1]$, a circle, a surface, etc. Let $f : X \rightarrow X$ uma função. Podemos interpretar f como a função que dá a evolução dos pontos $x \in X$ com o tempo. Se $x \in X$, considere os iterados $x, f(x), f(f(x)), \dots$.

Para $n > 0$ denotamos por $f^n(x)$ o n -ésimo iterado de x por f , isto é, $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$, n times. Por convenção, f^0 é a função identidade Id , isto é, $Id(x) = x$ para todo $x \in X$.

Caso f tenha inversa, a denotamos por f^{-1} e para $n < 0$, denotamos por $f^n(x)$ o n -ésimo iterado de x pela inversa f^{-1} .

Interpretamos $f^n(x)$ como o estado do ponto x no instante n .

Definição 1. A órbita positiva de x por f , $\mathcal{O}_f^+(x)$, é o conjunto dos pontos

$$\mathcal{O}_f^+(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots\} = \{f^n(x), n \in \mathbb{N}\}.$$

Se f tem inversa, denotada por f^{-1} , a órbita negativa de x , $\mathcal{O}_f^-(x)$, é dada por

$$\mathcal{O}_f^-(x) = \{x, f^{-1}(x), f^{-2}(x), \dots, f^{-n}(x), \dots\} = \{f^{-n}(x), n \in \mathbb{N}\}.$$

Neste caso, a órbita de x , $\mathcal{O}_f(x)$ é dada por

$$\{\dots, f^{-n}(x), \dots, f^{-2}(x), f^{-1}(x), x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots\} = \{f^n(x), n \in \mathbb{Z}\}.$$

Exemplo 2. Considere $X = [0, 1]$ e $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por $f(x) = 4x(1 - x)$.

Então, tomando $x = \frac{1}{3}$, obtemos

$$\mathcal{O}_f^+(13) = \{13, 43(1 - \frac{1}{3} = \frac{8}{9}, 4\frac{8}{9}(1 - \frac{8}{9}) = \frac{32}{8}1, \dots\}.$$

Exemplo 3. Sejam $X = S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \sqrt{x^2 + y^2} = 1\}$ e $f : S^1 \rightarrow S^1$ a rotação positiva (sentido do relógio) de ângulo θ , que leva cada ponto do círculo ao ponto obtido rodando positivamente por um ângulo θ .

Observamos que mesmo quando a lei de evolução do sistema é determinística, o comportamento depois de um tempo longo pode ser caótico, isto é, mesmo se dois pontos x e y estiverem muito próximos, existe um tempo n grande tal que os estados $f^n(x)$ e $f^n(y)$ de x e y estão longe um do outro. Esta propriedade é conhecida como *sensibilidade com respeito aos dados iniciais* e será definida formalmente abaixo. De fato, há muitas definições de caos, mas todas elas incluem sensibilidade às condições iniciais. Ramos diferentes da teoria dos sistemas dinâmicos, como dinâmica topológica e teoria ergódica tem ferramentas para quantificar o quão caótico é o sistemas e pode prever o comportamento assintótico do sistema. Veremos que mesmo sem poder prever o comportamento da evolução de uma partícula isolada, pode-se aferir o comportamento médio.

O principal objetivo da teoria dos sistemas dinâmicos é o entendimento do comportamento de todas ou quase todas órbitas. O comportamento das órbitas pode ser bastante

complicado, mesmo se a função ou sistema for simples. Uma das primeiras questões é saber se uma órbita é finita ou não. Mesmo se o parâmetro variar em $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, a órbita pode ser finita pois os pontos podem se repetir. Este é o tipo mais simples de órbita, dita *periódica*.

Definição 4. Um ponto $x \in X$ é periódico se existe $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, tal que $f^n(x) = x$. Se $n = 1$, dizemos que o ponto é fixo. O período de x é o menor inteiro n que satisfaz $f^n(x) = x$. Se x é ponto periódico de período n , $f^n(x) = x$ e $f^j(x) \neq f^k(x)$ for $j, k \in \{1, \dots, n-1\}$, and $j \neq k$.

Um ponto x é pre-periódico se existem $k, j \in \mathbb{N}$ tais que $f^{n+k}(x) = f^k(x)$. Neste caso, $f^{n+j}(f^k(x)) = f^j(f^k(x))$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

No Exemplo 2 acima, o ponto $x = \frac{3}{4}$ é um ponto fixo.

No Exemplo 3 acima, se $\theta = \frac{\pi}{2}$, temos que todo ponto do círculo é periódico de período 4 e todas as órbitas é formada por 4 pontos.

Exercício 5. Mostre que se f tem inversa então todo ponto pre-periódico é periódico.

Questão 6. Seja $f(x) = 4x(1-x)$, $x \in [0, 1]$.

- f tem pontos fixos, pre-periódicos e periódicos?
- Os pontos periódicos de f são densos ?
- Existe $x \in [0, 1]$ com órbita densa em $[0, 1]$?
- Todas as órbitas são densas?

Vamos responder estas questões nas próximas aulas.

Note que se uma órbita é densa, então ela visita toda parte do espaço. Isso leva naturalmente a perguntar quanto tempo ela permanece em cada região do espaço. Por exemplo, sejam $A \subset X$ um subconjunto do espaço X e $n \in \mathbb{N}$. Podemos contar o número de pontos de $\{x, f(x), \dots, f^n(x)\} \subset \mathcal{O}_f^+(x)$ que pertencem a A . Se $\mathcal{X}_A$ denota a função característica de A , definida por

$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A, \end{cases}$$

o número de visitas da órbita de X ao conjunto A é dado por

$$\text{Card}\{0 \leq k < n, \text{ tais que } f^k(x) \in A\} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{X}_A(f^k(x))$$

e a frequência de visitas no tempo n é dada por

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{X}_A(f^k(x)). \quad (1.1)$$

Dizemos que a órbita de x é *equidistribuída* se a frequência de visitas da $\mathcal{O}_f^+(x)$ dada pela equação 1.1 vai ficando cada vez mais próxima do *volume ou área ou comprimento* de A . Isso significa que assintoticamente, a órbita de x passa em cada parte de X um tempo proporcional ao volume de A .

Questão 7. As órbitas de f do Exemplo 2 são equidistribuídas?

Esta última questão é uma das perguntas básicas da teoria ergódica. A priori, nem mesmo a existência do limite da frequência (1.1) é certo. O Teorema de Birkhoff, um dos mais importantes nesta teoria, garante que tal limite existe para *quase-todos* se o sistema dinâmico em estudo é suficientemente caótico. Veremos adiante este teorema.

1.1. Plano do Curso. Seguiremos a programação:

Aula-1. Rotações do círculo e o Teorema de Poincaré.

Aula-2 A família quadrática e a aplicação deslocamento.

Aula-3 A ferradura de Smale e difeomorfismos de Anosov no toro.

Aula-4 O solenóide e o derivado de Anosov.

Aula-5 O Atrator Geométrico de Lorenz.

2. APLICAÇÕES DO CÍRCULO

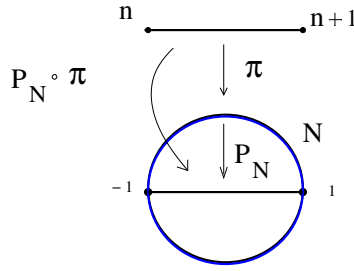
Considere o círculo unitário $S^1 = \{(x, y); \sqrt{x^2 + y^2} = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ e seja $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\pi(x) = e^{2\pi i x} = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)).$$

Proposição 8. π é um homeomorfismo local.

Demonstração. Tome, por exemplo, um intervalo da forma $(n, n + 1/2)$, $n \in \mathbb{Z}$ e vamos provar que π o transforma homeomórficamente sobre o semi-círculo norte $N = \{(x, y) \in S^1, y > 0\}$.

De fato, considere a projeção $p_N : N \rightarrow (-1, 1)$, $p_N(x, y) = x$. Claro que p_N é um homeomorfismo e $p_N^{-1}(x) = (x, \sqrt{1 - x^2})$.



A aplicação composta $p_N \circ \pi : (n, n + 1/2) \rightarrow (-1, 1)$, $x \mapsto \cos(2\pi x)$ também é um homeomorfismo. Logo,

$$\pi = p_N \circ (p_N \circ \pi) : (n, n + 1/2) \rightarrow N$$

é um homeomorfismo.

Considerando o semi-círculo sul $S = \{(x, y), y < 0\}$ e a projeção $p_S : S \rightarrow (-1, 1)$, $(x, y) \mapsto x$, temos que $p_S^{-1}(x) = (x, -\sqrt{1-x^2})$ e repetindo o argumento acima vemos que $\pi : (n - 1/2, n) \rightarrow S$ é um homeomorfismo.

Analogamente, os intervalos da forma $(n - 1/4, n + 1/4)$ e $(n + 1/4, n + 3/4)$ são transformados homeomorficamente por π nos semi-círculos leste e oeste.

Como os intervalos da forma acima cobrem o $\mathbb{R}$ temos que $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ é um homeomorfismo local.

□

Observação 9. A proposição acima implica que dado $a \in S^1$, existe um arco $J \subset S^1$ com $a \in J$ tal que $\pi^{-1}(J) = \cup_{n \in \mathbb{Z}} I_n$, onde I_n é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ homeomorfo a J para todo n .

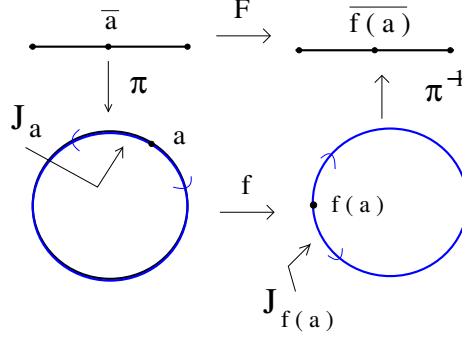
Proposição 10. *Seja $f : S^1 \rightarrow S^1$ um difeomorfismo. Existe $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\pi \circ F = f \circ \pi$.*

Demonstração. Tome $a \in S^1$ e escolha $\bar{a} \in \mathbb{R}$ tal que $\pi(\bar{a}) = a$. Pela Remark 9, existem um intervalo aberto $I_{\bar{a}} \subset \mathbb{R}$ e um arco aberto $J_a \subset S^1$ com $\bar{a} \in I_{\bar{a}}$ e $a \in J_a$ tal que $\pi : I_{\bar{a}} \rightarrow J_a$ é um homeomorfismo.

Considere $f(a)$ e tome $\overline{f(a)} \in \mathbb{R}$ tal que $\pi(\overline{f(a)}) = f(a)$. Repetindo o argumento acima para $f(a)$ e $\overline{f(a)}$, encontramos abertos $J_{f(a)} \subset S^1$ e $I_{\overline{f(a)}} \subset \mathbb{R}$, $f(a) \in J_{f(a)}$ e $\overline{f(a)} \in I_{\overline{f(a)}}$ tais que $\pi : J_{f(a)} \rightarrow I_{\overline{f(a)}}$ é um homeomorfismo.

Como $f : S^1 \rightarrow S^1$ é um difeomorfismo, podemos supor que $f(J_a) = J_{f(a)}$.

Daí segue que $F : I_{\bar{a}} \rightarrow I_{\overline{f(a)}}$ dada por $F(x) = \pi^{-1} \circ f \circ \pi(x)$ está bem definida e é um difeomorfismo.



Agora, tome uma sequência finita de pontos $a_1 = a, a_2, \dots, a_n$ de S^1 e considere J_{a_i} e $J_{f(a_i)}$ arcos de S^1 tais que para cada i tem-se que $f : J_{a_i} \rightarrow J_{f(a_i)}$ é um difeomorfismo.

Para cada i , sejam $\bar{a}_i \in \mathbb{R}$ e $\overline{f(a_i)} \in \mathbb{R}$ e intervalos $I_{\bar{a}_i}$ e $I_{\overline{f(a_i)}}$ pontos e intervalos abertos como acima tais que

$$\pi : I_{\bar{a}_i} \rightarrow J_{a_i} \quad \text{e} \quad \pi : I_{\overline{f(a_i)}} \rightarrow J_{f(a_i)}$$

são difeomorfismos.

Isto implica que podemos definir

$$F : I_{\bar{a}_1} \cup \dots \cup I_{\bar{a}_n} \rightarrow \cup I_{\overline{f(a_i)}} \quad \text{como} \quad F = \pi^{-1} \circ f \circ \pi.$$

Verifica-se facilmente que F está bem definida em cada $I_{\bar{a}_i} \cap I_{\bar{a}_{i+1}}$ o que prova a proposição. $\square$

Definição. A função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida na proposição acima é chamada um *levantamento* de $f : S^1 \rightarrow S^1$.

Exercício 11. Verifique que se $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são dois levantamentos de $f : S^1 \rightarrow S^1$ então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $F - G = k$.

3. ROTAÇÕES DO CÍRCULO E O TEOREMA DE POINCARÉ

Considere o círculo unitário $S^1 = \{(x, y); \sqrt{x^2 + y^2} = 1\} \subset \mathbb{R}^2$. Identificando $\mathbb{R}^2$ com o plano complexo $\mathbb{C}$ podemos escrever

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C}; \|z\| = 1\} = \{e^{2\pi i \theta}, 0 \leq \theta < 1\} \subset \mathbb{C}.$$

Considere a rotação, R_α no sentido anti-horário, de ângulo $2\pi\alpha > 0$ definida em S^1 . Isto é,

$$R_\alpha(e^{2\pi i\theta}) = e^{2\pi i(\theta+\alpha)} = e^{2\pi i\alpha} e^{2\pi i\theta}.$$

Seja $\text{dist}(z_1, z_2)$ a distância natural em S^1 , dada pelo *comprimento de arco* entre z_1 e z_2 . O comprimento de arco entre z_1 e z_2 , $\ell(z_1, z_2)$, é o comprimento do menor arco ligando z_1 a z_2 . Sempre normalizamos este comprimento dividindo-o por 2π . Por exemplo, se $0 \leq \theta_1 < \theta_2$ e $2\pi(\theta_2 - \theta_1) < \pi$ temos

$$\ell(e^{2\pi i\theta_1}, e^{2\pi i\theta_2}) = \frac{\ell - \text{distância}}{2\pi} = \frac{2\pi(\theta_2 - \theta_1)}{2\pi} = \theta_2 - \theta_1.$$

Se $0 \leq \theta_1 < \theta_2$ e $2\pi(\theta_2 - \theta_1) \geq \pi$ temos

$$\ell(e^{2\pi i\theta_1}, e^{2\pi i\theta_2}) = \frac{\ell - \text{distância}}{2\pi} = \frac{2\pi - 2\pi(\theta_2 - \theta_1)}{2\pi} = 1 - (\theta_2 - \theta_1).$$

Observe que a rotação preserva a distância ℓ , isto é, para todo z_1 e z_2 em S^1 tem-se

$$\ell(R_\alpha(z_1), R_\alpha(z_2)) = \ell(z_1, z_2).$$

A rotação é um exemplo de uma isometria, isto é, uma aplicação que preserva distância.

O círculo S^1 também pode ser escrito do seguinte modo alternativo. Começamos definindo a relação de equivalência $\sim$ entre os números reais, definida por: dados $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, dizemos que x_1 e x_2 são equivalentes se existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x_1 = x_2 + k$. Então $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = I / \sim$, $I = [0, 1]$, pois o intervalo I contém exatamente um representante de cada classe de equivalência, exceto da classe que contém 0 e 1. Isso não causa problema porque 0 e 1 são identificados como o mesmo ponto em S^1 .

A função $\pi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow S^1$ dada por

$$x \mapsto \pi(x) = e^{2\pi ix}, \quad (3.1)$$

é uma bijeção entre $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e S^1 . A distância comprimento de arco ℓ dividida por 2π em S^1 induz uma distância em $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, que denotamos pelo mesmo simbolo ℓ , dada por:

$$\ell(x, y) = \min\{|x - y|, 1 - |x - y|\}. \quad (3.2)$$

Exercício 12. Considere a função $\pi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ definida acima. Verifique:

- (1) π está bem definida, e é uma bijeção.
- (2) vale a fórmula (3.2) acima para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Observe que considerando $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} = I/\sim$, a rotação de ângulo $2\pi\alpha$ em S^1 é transformada na função

$$R_\alpha(x) = x + \alpha \pmod{1},$$

onde $\text{mod } 1$ significa que subtraímos a parte inteira de x . Ou seja, a translação R_α é um levantamento da rotação R_α em S^1 . Chamamos α o número de rotação de R_α . Lembre que a rotação R_α é de ângulo $2\pi\alpha$. Assim, dado $\alpha \in [0, 1]$, temos

$$R_\alpha(x) = \begin{cases} x + \alpha & \text{se } x + \alpha < 1 \\ x + \alpha & \text{se } x + \alpha \geq 1. \end{cases}$$

A dinâmica de R_α depende do número de rotação α ser um número racional, isto é, $\alpha \in \mathbb{Q}$ ou não. Antes de esclarecer este ponto, vamos lembrar a definição de órbita densa:

Definição 13. A órbita $\mathcal{O}_{R_\alpha}^+(z_1)$, $z_1 \in S^1$, é densa em S^1 se para todo $z_2 \in S^1$ e todo $\epsilon > 0$, existe $n > 0$ tal que $\ell(R_\alpha^n(z_1), z_2) < \epsilon$.

Teorema 14. Seja $R_\alpha : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ a rotação do círculo.

- (a) Se $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ todas as órbitas são periódicas de período q ,
- (b) Se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, para todo $z_1 \in S^1$, a órbita $\mathcal{O}_{R_\alpha}^+(z_1)$ é densa em S^1 .

Demonstração. Prova de (a): Suponha $\alpha = \frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{Z}$. Então, para cada $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$,

$$R_\alpha^q(x) = x + q \frac{p}{q} \pmod{1} = x + p \pmod{1} = x.$$

Assim, todo ponto é periódico de período q .

Prova de (b): Neste caso trabalhamos com a notação multiplicativa em S^1 , isto é, consideramos $S^1 = \{z \in \mathbb{C}, \|z\| = 1\}$ e usamos a métrica ℓ do comprimento de arco normalizada (dividida por 2π).

Afirmção 1. Se α é irracional, dado $z_1 = e^{2\pi i x_1} \in S^1$, $R_\alpha^n(e^{2\pi i x_1}) \neq R_\alpha^m(e^{2\pi i x_1})$ para $n \neq m$.

Prova do Claim 1 Suponha, por contradição, que existem $n \neq m \in \mathbb{Z}$ com $R_\alpha^n(e^{2\pi i x_1}) = R_\alpha^m(e^{2\pi i x_1})$. Então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$2\pi(x_1 + m\alpha) = 2\pi(x_1 + n\alpha) + 2\pi k \quad \text{que implica} \quad m\alpha = n\alpha + k.$$

Como $m \neq n$, isto mostra que $\alpha = \frac{k}{m-n}$, contradizendo que α é irracional.

Afirmção 2. Para todo $\epsilon > 0$ existem dois pontos distintos $R_\alpha^n(z_1)$, $R_\alpha^m(z_1)$ na órbita $\mathcal{O}_{R_\alpha}^+(z_1)$ satisfazendo $\ell(R_\alpha^n(z_1), R_\alpha^m(z_1)) \leq \frac{1}{N} < \epsilon$.

Prova da Afirmação 2 – Dado $\epsilon > 0$, escolha $N \in \mathbb{N}$ com $\frac{1}{N} < \epsilon$ e considere os pontos $z_1, R_\alpha(z_1), \dots, R_\alpha^N(z_1) \in \mathcal{O}_{R_\alpha}(z_1)$. A Afirmação 1 dá que estes $N + 1$ pontos são dois a dois distintos. Assim, se dividirmos o círculo S^1 em N arcos de mesmo comprimento ϵ , temos que pelo menos um dos arcos tem dois dos $N + 1$ pontos acima. Portanto, existem $n \neq m$, contidos em um mesmo arco, isto é,

$$\ell(R_\alpha^n(z_1), R_\alpha^m(z_1)) < \epsilon.$$

Finalmente vamos provar que a órbita de $z_1 \in S^1$ é densa em S^1 . De fato, dado $z_2 \in S^1$, e $\epsilon > 0$, tome um arco centrado em z_2 com comprimento ϵ e considere R_α^{m-n} , onde m e n são como na Afirmação 2.

Afirmação 3. R_α^{m-n} é uma rotação de ângulo menor que $2\pi\epsilon$.

Prova da Afirmação 3– Note que

$$R_\alpha^{m-n}(z_1) = e^{2\pi i(m-n)\alpha} z_1 = R_{(m-n)\alpha}(z_1),$$

e assim $R_{(m-n)\alpha}$ é uma rotação de ângulo $2\pi(m-n)\alpha$. Pela Afirmação 2 e usando que as rotações são isometrias, obtemos

$$\ell(R_\alpha^{n-m}(z_1), z_1) = \ell(R_\alpha^m(R_\alpha^{n-m}(z_1)), R_\alpha^m(z_1)) = \ell(R_\alpha^n(z_1), R_\alpha^m(z_1)) \leq \frac{1}{N} < \epsilon,$$

Isto mostra que a rotação R_α^{m-n} move os pontos por um arco de comprimento menor que $\frac{2\pi}{N}$, isto é, por uma distância menor que $\frac{1}{N} < \epsilon$.

Então, os pontos

$$z_1, R_\alpha^{(m-n)}(z_1), R_\alpha^{2(m-n)}(z_1), R_\alpha^{3(m-n)}(z_1), \dots,$$

estão espaçados por um arco de comprimento menor que $\pi\epsilon$, ou, em outras palavras, a distância entre dois pontos consecutivos da órbita é menor que ϵ . Portanto, existe $j > 0$ tal que $R_\alpha^{j(m-n)}(z_1)$ entra no arco de comprimento ϵ centrado em z_2 , provando que a órbita de z_1 é densa em S^1 . □

Exercício 15. Prove que se $\alpha = \frac{p}{q}$, com p e q primos entre si, então q é o período de qualquer $x \in S^1$, isto é, para cada $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tem-se $R_\alpha^k(x) \neq x$ para todo $1 \leq k < q$.

Observação 16. Se $\alpha = \frac{p}{q}$, com p e q primos entre si, $|p|$ é o número de voltas que a órbita de x dá em torno de S^1 antes de fechar.

Exercício 17. Sejam $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e $f(x_1, x_2) = (R_{\alpha_1}(x_1), R_{\alpha_2}(x_2))$, com α_1 e α_2 números reais, sendo pelo menos um deles irracional.

- (1) Escreva o n -ésimo termo da órbita $\mathcal{O}_f^+(z)$, $z = (x_1, x_2)$ e mostre que os termos de $\mathcal{O}_f^+(z)$ são dois a dois distintos.
- (2) Mostre que dados $z = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e $N \in \mathbb{N}$ positivo, existe $1 \leq n \leq N$ tal que

$$\text{dist}(f^n(z), z) \leq \frac{\sqrt{2}}{N}.$$

3.1. O Teorema de Poincaré para homeomorfismos de S^1 . O objetivo desta seção é caracterizar os homeomorfismos de S^1 , segundo a existência ou não de pontos periódicos. Esta caracterização é devida a Poincaré.

Teorema 18. *Seja $f : S^1 \rightarrow S^1$ um homeomorfismo preservando orientação. Então valem as seguintes afirmativas*

- (a) *Se f tem um ponto periódico então sua dinâmica é trivial: qualquer órbita é assintótica a uma órbita periódica e quaisquer duas órbitas periódicas tem o mesmo período.*
- (b) *Se f não possui pontos periódicos então existe uma rotação $R_\alpha : S^1 \rightarrow S^1$ tal que qualquer órbita de f tem a mesma ordem que uma órbita de R_α . Isto é, a aplicação $h : \mathcal{O}_f(z) \rightarrow \mathcal{O}_{R_\alpha}(w)$, definida por $h(f^n(z)) \doteq R_\alpha^n(w)$, $n \in \mathbb{Z}$, é monótona.*

Observação 19. Observe que se f não tem pontos periódicos, então (b) acima diz que se $x, y \in \mathcal{O}_f(z)$ e y está entre x e z , então $h(y)$ está entre $h(x)$ e $h(z)$. Deste fato segue que h se estende continuamente a uma transformação monótona $\bar{h} : S^1 \rightarrow S^1$ satisfazendo a equação $\bar{h} \circ f = R_\alpha \circ \bar{h}$. Assim, $\bar{h}$ é uma semi-conjugação entre f e a rotação R_α . Em geral, $\bar{h}$ não é uma conjugação porque podem existir pontos em S^1 cuja pre-imagem por $\bar{h}$ é um intervalo.

Para provar o Teorema 18, vamos primeiro verificar o lema abaixo.

Lema 20. *Seja $f : J \rightarrow J$, J um intervalo fechado de $\mathbb{R}$, invertível e contínua, preservando orientação. Então qualquer órbita de f é assintótica a um ponto periódico de f .*

Demonstração. Como f preserva orientação, se $x \in J$ e $f(x) > x$, então $f^2(x) = f(f(x)) > f(x)$. Por indução, provamos que para todo n , $f^n(x) = f(f^{n-1}(x)) > f^{n-1}(x)$. Assim, $(f^n(x))_n$ é monótona crescente e portanto converge para $y \in J$, pois

J é fechado. Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = y \in J.$$

Como f é contínua segue $f(y) = f(\lim_n f^n(x)) = \lim_n f^{n+1}(x) = y$.

Assim, y é ponto fixo e a órbita de x é assintótica a y .

Como f^{-1} também é monótona crescente, usando o argumento acima prova-se que o α -limite de qualquer $x \in J$ é um ponto fixo de f .

Quando f é decrescente, então $f^2 = f \circ f$ é crescente e como acima concluímos que toda órbita é assintótica ou a um ponto fixo ou a um ponto periódico de período 2.

□

Demonstração. de (a) do Teorema 18

Seja y com $f^k(y) = y$. Assim, y é um ponto fixo de $g = f^k$. Seja $\tilde{J} = J \setminus \{y\}$. Como f preserva orientação, $g : \tilde{J} \rightarrow J$ é monótona crescente. E pelo Lema 20 segue que a órbita de todo x é assintótica a um ponto fixo de g (e portanto periódico com período k de f).

Se f inverte orientação, então f tem um único ponto fixo e como f^2 preserva orientação, obtemos que toda órbita é assintótica a um ponto fixo ou a um ponto periódico de período 2.

□

Observação 21. Isto dá a descrição completa da dinâmica de homeomorfismos do círculo S^1 que possuem pontos periódicos.

Observação 22. A prova de (b) do Teorema 30 é mais elaborada, usa o conceito de número de rotação e faremos em outra ocasião.

3.2. Número de Rotação. Dada $f : S^1 \rightarrow S^1$ um difeomorfismo que preserva orientação, denote por $\hat{f}$ um dos levantamentos de f . Então, $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz $\pi \circ \hat{f} = f \circ \pi$, onde $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ é a projeção $\pi(x) = e^{2\pi i x}$. Como f é crescente e preserva orientação, $\hat{f}$ é crescente e satisfaz $\hat{f}(x) = x + 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 23. Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções monótonas tais que $f(x+1) = f(x) + 1$ e $g(x+1) = g(x) + 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Então valem as afirmativas

- (a) O limite $\rho(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(0)}{n}$ existe e $|\frac{f^n(0)}{n} - \rho(f)| < 1/n$;
- (b) O limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(x) - x}{n}$ existe para todo x e é igual a $\rho(x)$;
- (c) $\rho(x) = m/n$, $n > 0$, $m \in \mathbb{Z}$ se e só se $\exists x \in \mathbb{R}$ tal que $f^n(x) = x + m$;
- (d) dado $\epsilon > 0 \exists \delta > 0$, tal que se $\|f - g\|_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)| < \delta$ então $|\rho(f) - \rho(g)| < \epsilon$;

(e) $\rho(f + n) = \rho(f) + n$ para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Observação 24. O exercicio acima permite definir número de rotação para funções monótonas de grau 1 do círculo, isto é, para funções $\phi : S^1 \rightarrow S^1$ monótona e satisfazendo $\hat{\phi}(x+1) = \phi(\hat{x}) + 1$, definimos

$$\rho(\phi) = \pi\rho(\hat{\phi})$$

Lema 25. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monótona, contínua com $f(x+1) = f(x) + 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e tal que $\rho(f) = \alpha \notin \mathbb{Q}$. Então $\rho(f - \epsilon) < \rho(f)$ para todo $\epsilon > 0$.*

Observação 26. O lema acima implica que se $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$ então $\rho(f)$ não é constante em nenhuma vizinhança de f .

Definição 27. As aplicações $f : S^1 \rightarrow S^1$ e $g : S^1 \rightarrow S^1$ são semi-conjugadas se existe $h : S^1 \rightarrow S^1$ contínua tal que

$$h \circ f = g \circ h.$$

Quando h é um homeomorfismo, dizemos que f e g são conjugadas e h é uma conjugação.

Lema 28. *Sejam $f : S^1 \rightarrow S^1$ e $g : S^1 \rightarrow S^1$ homeomorfismos conjugados. Então $\rho(f) = \rho(g)$.*

Demonstração. Caso (a): $\rho(f) = p/q \in \mathbb{Q}$. então existe x tal que $f^q(x) = x + p$, o que implica $h(f^q(x)) = h(x + p) = h(x) + p$. Como $h \circ f^q = g^q \circ h$ e portanto $h(f^q(x)) = g^q(h(x)) = h(x) + p$ e isto implica que $\rho(g) = p/q$.

Caso (b): $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Neste caso, seja p_n sequencia de inteiros tal que

$$pn < n\alpha < p_n + 1. \quad (3.3)$$

Então

$$\frac{pn}{n} < \alpha < \frac{p_n + 1}{n}.$$

Portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{pn}{n} = \alpha \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n + 1}{n} = \alpha.$$

Além disso, se $p_{n+1} = p_n + 1$, (3.3) implica que para todo x e para todo n , tem-se

$$x + p_n < f^n(x) < x + p_{n+1}.$$

Portanto

$$h(x) + p_n < h(f^n(x)) = g^n(h(x)) < h(x) + p_{n+1} \implies \frac{p_n}{n} < \frac{g^n(h(x)) - h(x)}{n} < \frac{p_{n+1}}{n}.$$

Daí segue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g^n(h(x)) - h(x)}{n} = \alpha \implies \rho(g) = \alpha = \rho(f).$$

□

Lema 29. *Seja $\phi : S^1 \rightarrow S^1$ um homeomorfismo que preserva orientação e seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ um levantamento de ϕ com $f(0) \in (0, 1)$. Assuma que $\rho = \rho(f) \notin \mathbb{Q}$. Sejam*

$$A = \{n\rho + m, n, m \in \mathbb{Z}\} \quad \text{and} \quad B = \{f^n(0) + m, n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Então $h_0 : A \rightarrow B$ definida por

$$h_0(n\rho + m) = f^n(0) + m$$

é uma bijeção monótona.

Demonstração. Temos que verificar que

$$n\rho + m < k\rho + l \iff f^n(0) + m < f^k(0) + l.$$

Afirmção 4. *Vamos verificar primeiro que se $p, q, r \in \mathbb{Z}$ são tais que $p < f^q(0) < r$ então $p < q\rho < r$.*

De fato, temos

$$p < f^q(0) < r \implies f^q(0) + p = f^q(p) < f^{2q}(0) < f^q(r) = f^q(0) + r.$$

Repetindo o argumento obtemos

$$f^q(0) + (k-1)p < f^{kq}(0) < f^q(0) + (k-1)r \implies \frac{1}{k}f^q(0) + \left(1 - \frac{1}{k}\right)p < q \frac{f^{kq}(0)}{qk} < \frac{1}{k} + \left(1 - \frac{1}{k}\right)r.$$

Portanto

$$p \leq q \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f^{kq}(0)}{qk} \leq r \implies p \leq q\rho \leq r.$$

Como $\rho \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, concluímos $p < q\rho < r$.

Agora vamos provar que

$$f^n(0) + m < f^k(0) + l \iff n\rho + m < k\rho + l.$$

De fato, a Afirmção acima implica

$$f^n(0) + m < f^k(0) + l \iff f^{n-k}(0) < l - m \iff (n-k)\rho < l - m \iff n\rho + m < k\rho + l.$$

Observe que $\rho \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \implies h$ é 1-1. A prova do Teorema segue.

□

Teorema 30. *Seja $\phi : S^1 \rightarrow S^1$ um homeomorfismo que preserva orientação tal que $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$. Então ϕ é semi-conjugado a rotação $R_\rho : S^1 \rightarrow S^1$.*

Demonstração. Sejam A e B os conjuntos definidos em Lema 29.

Seja $r : A \rightarrow A$ definida por $r(y) = y + \rho$ e considere $h_0 : A \rightarrow B$ definida como $h_0(n\rho + m) = f^n(0) + m$.

Então $h_0(x + 1) = h_0(x) + 1$ para todo $x \in A$ e

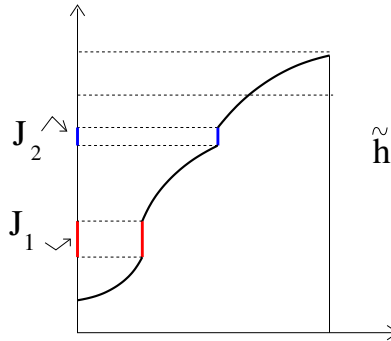
$$h_0(r(y)) = h_0(y + \rho) = h_0(n\rho + m + \rho) = h_0((n + 1)\rho + m) =$$

$$f^{n+1}(0) + m = f(f^n(0)) + m = f(f^n(0) + m) = f(h_0(y)).$$

Como $\rho \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, A é denso em $\mathbb{R}$ e portanto podemos definir $\tilde{h} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\tilde{h}(x_0) = \lim_{x \in A, x \rightarrow x_0} h_0(x).$$

Como h_0 é monotona, segue que $\tilde{h}$ está bem definida.



Além disso, como $\tilde{h}$ é periódica de período 1 em x , temos que $\tilde{h}$ é o levantamento de $\bar{h} : S^1 \rightarrow S^1$.

Como $r(y) = y + \rho$ é o levantamento de $R_{2\pi\rho}$ e vale que

$$h_0 \circ r = f \circ h_0 \implies \bar{h} \circ R_{2\pi\rho} = \phi \circ \bar{h}.$$

Como $\tilde{h}$ é monótona, $\tilde{h}$ é descontínua no máximo em um número enumerável de pontos, e as discontinuidades de $\tilde{h}$ são do tipo salto.

Isto significa que $\tilde{h}^{-1}$ pode ser estendida para $\mathbb{R}$, colocando

$$\tilde{h}^{-1}(J) = k,$$

em cada intervalo J que corresponde a um salto de $\tilde{h}$. É claro que a extensão de $\tilde{h}^{-1}$ a $\mathbb{R}$ é contínua e satisfaz

$$r \circ \tilde{h}^{-1} = \tilde{h}^{-1} \circ f.$$

Finalmente, seja $h : S^1 \rightarrow S^1$ tal que $\tilde{h}^{-1}$ é o levantamento de h . Então, claramente h é contínua e vale a equação

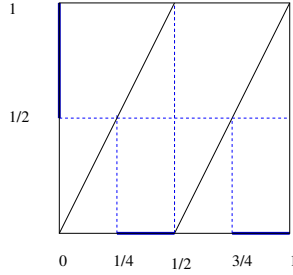
$$R_{2\pi\rho} \circ h = h \circ \phi,$$

terminando a prova de (b) do Teorema 18. □

4. APLICAÇÕES EXPANSORAS NO INTERVALO

Seja $f_2 : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ definida por

$$f_2(x) = 2x \mod 1 = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 \leq x < 1/2 \\ 2x - 1 & \text{se } 1/2 \leq x < 1, \end{cases} \quad (4.1)$$



Observe que f_2 está bem definida em $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = [0, 1]/\sim$, pois 0 e 1 que são identificados tem imagens equivalentes porque $f_2(1) = f_2(0) = 0$. Assim, podemos pensar que f é uma função definida em $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = I/\sim$. Como $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ está identificado com S^1 , podemos ver f_2 em coordenadas multiplicativas como

$$f_2(e^{2\pi i\theta}) = e^{2\pi i2\theta} = (e^{2\pi i\theta})^2.$$

Observe que os ângulos são dobrados por f_2 e f_2 é contínua em S^1 . Além disso, f_2 não é invertível porque cada ponto x tem duas pré-imagens $f_2^{-1}(x) = \{\frac{x}{2}, \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\}$ e f_2 expande distâncias: se $\ell(x, y) < \frac{1}{4}$ então

$$\ell(f(x), f(y)) = 2\ell(x, y).$$

Questão 31. f_2 tem pontos periódicos?

Questão 32. Os pontos periódicos são densos?

4.1. Conjugação e semi-conjugação. Sejam X, Y dois espaços, $f : X \rightarrow X$ e $g : Y \rightarrow Y$ duas funções.

Definição 33. Uma conjugação (semi-conjugação) entre f e g é uma aplicação invertível (sobrejetiva) $h : Y \rightarrow X$ tal que $h \circ g = f \circ h$, isto é, para todo $y \in Y$, temos $h(g(y)) = f(h(y))$.

Lema 34. Se f e g são conjugadas (semi-conjugadas) por h , então y é periódico de período n para g se e só se $h(y)$ é periódico de período n para f .

Exercício 35. Verifique que se $h(g(y)) = f(h(y))$ então, para todo n tem-se $h(g^n(y)) = f^n(h(y))$.

4.2. Expansão binária e aplicação expansora. Dado $x \in [0, 1]$, a expansão binária de x é dada por

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^{i-1}}, \quad x_i \in \{0, 1\}.$$

Observe que se f é a função definida em (4.1) então a expansão binária de $f(x)$ é :

$$f(x) = 2x \bmod 1 = \sum_{i=1}^{\infty} 2 \frac{x_i}{2^i} \bmod 1 = x_1 + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{x_i}{2^{i-1}} \bmod 1 = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{x_i}{2^{i-1}},$$

e, se mudamos os índices colocando $j = i - 1$, verificamos que

$$\text{se } x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i}, \text{ então } f(x) = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{x_i}{2^{i-1}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_{j+1}}{2^j},$$

ou seja, os dígitos da expansão binária de $f(x)$ são os dígitos da expansão binária de x deslocados por 1.

4.3. A aplicação deslocamento σ . Seja $\sum_2^+ = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ o conjunto de todas as sequências de 0's e 1's:

$$\sum_2^+ = \{(a_i)_{i=1}^{\infty}, a_i \in \{0, 1\}\}.$$

Os pontos $(a_i)_{i=1}^{\infty} \in \sum_2^+$ são as sequências de 0's e 1's.

A aplicação *deslocamento* é a aplicação $\sigma : \sum_2^+ \rightarrow \sum_2^+$ definida por

$$\sigma((a_i)_{i=1}^{\infty}) = (b_i)_{i=1}^{\infty}, \quad \text{onde } b_i = a_{i+1}.$$

Ou seja, a imagem da sequência $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ é obtida omitindo o primeiro dígito e deslocando todos os outros uma posição a esquerda. Observe que como perdemos o primeiro dígito, σ não é invertível.

Agora defina $h : \sum_2^+ \rightarrow [0, 1]$ por

$$h((a_i)_{i=1}^{\infty}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}. \quad (4.2)$$

Note que a série $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$, que é convergente. Assim, h está bem definida.

A função h associa a cada sequência de 0 e 1 um número real em $[0, 1]$ que tem a_i como dígito da sua expansão binária.

Exercício 36. Seja

$$\mathcal{D} = \left\{ \frac{k}{2^n}, 0 \leq k < 2^n, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

Mostre que todo $\frac{p}{q} \in \mathcal{D}$ tem duas expansões binárias, uma com cauda de 0's e outra com cauda de 1's.

Proposição 37. A função $h : \sum_2^+ \rightarrow [0, 1]$ é uma semi-conjugação entre a aplicação deslocamento $\sigma : \sum_2^+ \rightarrow \sum_2^+$ e a aplicação expansora definida pela equação (4.1).

Demonstração. Como todo $x \in [0, 1]$ tem pelo menos uma expansão binária, podemos escrever $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}$, $a_i \in \{0, 1\}$. Então, a sequência $(a_i)_{i=1}^{\infty} \in \sum_2^+$ dos dígitos de sua expansão binária é tal que $h(x) = (a_i)_{i=1}^{\infty} \in \sum_2^+$, provando que h é sobrejetiva.

Agora vamos provar que $h \circ \sigma = f \circ h$. Para isso, observe que

$$h(\sigma((a_i)_{i=1}^{\infty})) = h((b_i)_{i=1}^{\infty}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{i+1}}{2^i}.$$

Por outro lado,

$$f(h((a_i)_{i=1}^{\infty})) = f\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}\right) \bmod 1 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{j+1}}{2^j},$$

mostrando a igualdade entre $h \circ \sigma$ e $f \circ h$, e concluindo a prova. □

Observação 38. Note que h não é injetiva apenas em $\mathcal{D}$, que é enumerável.

4.4. A dinâmica do descolamento σ . Começamos definindo uma métrica no espaço $\sum_2^+$ das sequências de dois símbolos dado acima.

Dadas $s = s_0 s_1 \cdots$ e $t = t_0 t_1 \cdots$ em $\sum_2^+$, definimos

$$\text{dist}(s, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}.$$

Como $|s_i - t_i| = 0$ ou 1 , a série acima converge. É fácil ver que dist define uma métrica em $\sum_2^+$.

Proposição 39. *Sejam $s, t \in \sum_2^+$ com $s_i = t_i$ para $0 \leq i \leq n$. Então $\text{dist}(s, t) \leq 1/2^n$. Reciprocamente, se $\text{dist}(s, t) \leq 1/2^n$ então $s_i = t_i$ para $0 \leq i \leq n$.*

Demonstração. Se $s_i = t_i$ para $0 \leq i \leq n$ então $|s_i - t_i| = 0$, $0 \leq i \leq n$, logo

$$\text{dist}(s, t) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n}.$$

Por outro lado, se $s_i \neq t_i$ para algum $i \leq n$ então $d(s, t) \geq \frac{1}{2^i} \geq \frac{1}{2^n}$. Daí concluímos que se $\text{dist}(s, t) < \frac{1}{2^n}$ então $s_i = t_i$ para $0 \leq i \leq n$. $\square$

O resultado acima diz que duas sequências estão próximas se e só se as primeiras n entradas das duas coincidem.

Definição. A transformação deslocamento é a função $\sigma : \sum_2^+ \rightarrow \sum_2^+$ definida por

$$\sigma(s_0 s_1 \cdots) = s_1 s_2 \cdots$$

Proposição 40. $\sigma : \sum_2 \rightarrow \sum_2$ é continua.

Demonstração. Sejam $\epsilon > 0$ e $s = s_0 s_1 \cdots$. Tome n tal que $\frac{1}{2^n} < \epsilon$ e $\delta = \frac{1}{2^{n+1}}$. Então, se

$$\text{dist}(s, t) < \delta = \frac{1}{2^{n+1}} \Rightarrow s_i = t_i \text{ para } 0 \leq i \leq n+1 \Rightarrow s_i = t_i \text{ para } 1 \leq i \leq n+1,$$

então

$$d(\sigma(s), \sigma(t)) \leq \frac{1}{2^n} < \epsilon.$$

$\square$

Proposição 41. *Valem as afirmativas*

(a): $\#P_n(\sigma) = 2^n$, $P_n(\sigma)$ = pontos periódicos de período n .

(b): $\overline{P(\sigma)} = \sum_2^+$ (densidade dos pontos periódicos).

(c): Existe uma órbita densa em $\sum_2^+$.

Demonstração. (a) s é periódica de período n para σ se e somente se

$$s = s_0 s_1 \cdots s_{n-1} s_0 s_1 \cdots s_{n-1} s_0 s_1 \cdots s_{n-1} s_0 s_1 \cdots .$$

Portanto, há 2^n blocos de comprimento n se e somente se $\#P_n(\sigma) = 2^n$.

(b) Dado $\epsilon > 0$ e $s = s_0 s_1 \cdots$ tome n com $\frac{1}{2^n} < \epsilon$. Seja $t = s_0 s_1 \cdots s_n s_0 s_1 \cdots s_n \cdots$. Então $t_i = s_i$ para $0 \leq i \leq n$ e portanto, $d(t, s) < \frac{1}{2^n} < \epsilon$ e t é periódica.

(c) Tome

$$s^* = \underbrace{01}_{\text{Blocos-comprimento 1}} \underbrace{00011011}_{\text{Blocos comprimento 2}} \underbrace{000001010100011}_{\text{Blocos-comprimento n}} .$$

Então, dada $s \in \sum_2^+$, $\exists n$ tal que $\sigma^n(s^*)_i = s_i$ para $0 \leq i \leq n$ então $d(s, \sigma^n(s^*)) < \frac{1}{2^n}$ e tem-se o resultado. $\square$

4.5. Itinerário de $x \in [0, 1] = I$. Considere os intervalos $I_0 = [0, \frac{1}{2})$, $I_1 = [\frac{1}{2}, 1)$. Observe que I_0 e I_1 dão uma partição $\mathcal{P}(I/\sim)$ de $I/\sim$, pois $I_0 \cup I_1 = [0, 1]$ e $I_0 \cap I_1 = \emptyset$.

Defina $\phi : I/\sim \rightarrow \sum_2^+$ por

$$x \mapsto \phi(x) = (a_k)_{k=0}^\infty, \quad \text{onde} \quad \begin{cases} a_k = 0 & \text{se } f^k(x) \in I_0 \\ a_k = 1 & \text{se } f^k(x) \in I_1. \end{cases}$$

A sequência $(a_k)_{i=0}^\infty$ acima é chamada *itinerário* da órbita $\mathcal{O}_f(x)$ com respeito a partição $\mathcal{P}$: é obtida iterando $f^k(x)$ e marcando qual intervalo $f^k(x)$ visita no tempo k . Assim, se $a_0, a_1, \dots, a_k, \dots$ é o itinerário de $\mathcal{O}_f(x)$, temos

$$x \in I_{a_0}, f(x) \in I_{a_1}, f^2(x) \in I_{a_2}, \dots, f^k(x) \in I_{a_k}, \dots$$

Proposição 42. Se $(a_i)_{i=0}^\infty$ é o itinerário de $x \in I$ então

$$x = \frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{2^2} + \frac{a_2}{2^{2^3}} + \cdots = \sum_{i=1}^\infty \frac{a_{i-1}}{2^i},$$

isto é, $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ são os dígitos da expansão binária de x .

Demonstração. Temos que checar que vale a fórmula

$$x = \frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{2^2} + \frac{a_2}{2^3} + \cdots = \sum_{i=1}^\infty \frac{a_{i-1}}{2^i}.$$

Vamos dividir a prova em casos.

Caso 1. ($i = 0$) Se o primeiro dígito do itinerário é $a_0 = 0$, $x \in I_0$, i. é, $0 \leq x < 1/2$, então o primeiro dígito da expansão binária de x é 0 pois de outro modo teríamos $x = \frac{1}{2} + \dots$ que é maior que $1/2$. Do mesmo modo, se $a_0 \in I_1$, ou seja, $1/2 \leq x < 1$, então o primeiro dígito da expansão binária de x é 1.

Caso 2. ($i = k$) Para mostrar que a k -ésima entrada a_k coincide com o k -ésimo dígito da expansão binária de x , basta iterar x por f k vezes e lembrar que se $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ são os dígitos da expansão binária de x , como o efeito de iterar por f é igual ao efeito de deslocar um dígito a esquerda, os dígitos de $f^k(x)$ são $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots$ e, pela definição de itinerário, o itinerário de $f^k(x)$ é $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots$. Assim, podemos proceder como antes: se $a_k = 0$ (respectivamente se $a_k = 1$), então $f^k(x) \in I_0$ (resp. I_1) e $0 \leq f^k(x) < 1/2$ (resp. $1/2 \leq f^k(x) < 1$). Então, o primeiro dígito da expansão binária de $f^k(x)$, x_{k+1} é 0 (resp. 1).

□

Observação 43. Existe outra maneira de dizer que a aplicação f_2 definida acima determina os dígitos da expansão binária de $x \in [0, 1]$ utilizando o fato que a aplicação h definida em (4.2) dá uma semiconjugação entre ϕ e a aplicação deslocamento σ .

4.6. Codificando f_2 . Suponha que $a_0, a_1, \dots, a_n$ é uma sequência de dígitos 0 ou 1. E considere

$$I(a_0, a_1, \dots, a_n) = \{x \in [0, 1]; \phi(x) = (a_0, a_1, \dots, a_n)\} = \{x \in [0, 1]; f_2^k(x) \in I_{a_k}, \forall 0 \leq k \leq n\}.$$

Observe que estes são os pontos cujo itinerário (e também cuja expansão binária) começa com $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$. Para determinar estes pontos, observe que

$$I(a_0, a_1, \dots, a_n) = I_{a_0} \cap f_2^{-1}(I_{a_1}) \cap \dots \cap f_2^{-n}(I_{a_n}).$$

Claro que se $x \in I_{a_0} \cap f_2^{-1}(I_{a_1}) \cap \dots \cap f_2^{-n}(I_{a_n})$ então $x \in I_{a_0}$, $f_2(x) \in I_{a_1}, \dots, f_2^n(x) \in I_{a_n}$, e pela definição, o itinerário de x começa com o bloco $a_0, a_1, \dots, a_n$.

Observe que para $I_0 = [0, 1/2)$ e $I_1 = [1/2, 1)$, temos

$$f_2^{-1}(I_1) = [1/4, 1/2) \cup [3/4, 1) \text{ o que implica } I(0, 1) = I_0 \cap f_2^{-1}(I_1) = [1/4, 1/2).$$

Repetindo este argumento para os outros pares de dígitos obtemos

$$I(0, 0) = [0, 1/4), \quad I(0, 1) = [1/4, 1/2), \quad I(1, 0) = [1/2, 3/4), \quad I(1, 1) = [3/4, 1).$$

Por indução, provamos:

- (P1) cada $I(a_0, a_1, \dots, a_n)$ é intervalo de comprimento $1/2^{n+1}$;
 (P2) como $a_0, a_1, \dots, a_n$ percorre todos os blocos possíveis com $(n+1)$ -uplas de dígitos 0 ou 1, obtemos uma partição de $[0, 1)$ em 2^n intervalos com comprimento $1/2^{n+1}$.

No caso de f_2 , temos cada intervalo desta partição é da forma

$$[\frac{k}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^{n+1}}), \quad 0 \leq k < 2^{n+1}. \quad (4.3)$$

A seguir vamos usar conjugação e coding para exibir uma órbita densa para f_2 .

Teorema 44. *Seja f_2 dada pela equação (4.1). Existe um ponto $\bar{x}$ cuja órbita positiva $\mathcal{O}_{f_2}^+(x)$ é densa em $[0, 1]$.*

Demonstração. Primeiro vamos provar que dado $n \geq 1$, se $\mathcal{O}_{f_2}^+(x)$ visita $I(a_0, a_1, \dots, a_n)$ para qualquer escolha de $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ então $\mathcal{O}_{f_2}^+(x)$ é densa. De fato, neste caso, dados $y \in [0, 1]$ e $\epsilon > 0$, tome $N \in \mathbb{N}$ tal que $1/2^{N+1} \leq \epsilon$ e tome o intervalo $I(a_0, a_1, \dots, a_N)$ que contém y . Assim, se existe um ponto $f_2^k(x) \in \mathcal{O}_{f_2}^+(x)$ que visita $I(a_0, a_1, \dots, a_N)$, como ambos y e $f_2^k(x)$ pertencem a $I(a_0, a_1, \dots, a_N)$, temos $\text{dist}(y, f_2^k(x)) \leq 1/2^{N+1} < \epsilon$ o que prova a afirmação.

Para construir uma órbita que visita todo intervalo da forma dada pela equação (4.3) vamos construir seu itinerário como uma sequência em Σ_2^+ .

Para isso, começamos por listar, para cada $n \in \mathbb{N}$, todos blocos possíveis de comprimento n com entradas $a_i \in \{0, 1\}$. E então criamos a sequência $(\bar{a}_i)_{i=0}^\infty$ simplesmente justapondo todos os blocos de comprimento para $n = 0$, depois para $n = 1$, depois para $n = 2$ e assim por diante:

$$0, 1, \quad 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, \quad 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, \dots$$

Agora definimos o ponto $\bar{x} = \psi((\bar{a}_i)_{i=0}^\infty)$ que tem a sequência $(\bar{a}_i)_{i=0}^\infty$ como dígitos de sua expansão binária.

Vamos verificar que sua órbita visita todos os intervalos da forma $I(a_0, a_1, \dots, a_n)$ e então que sua órbita é densa.

Para ver isso é suficiente encontrar onde o bloco $a_0, a_1, \dots, a_n$ aparece dentro de $(\bar{a}_i)_{i=0}^\infty$, por exemplo, $\bar{a}_k = a_0, \bar{a}_{k+1} = a_1, \dots, \bar{a}_{k+n} = a_n$. Desde que por definição o itinerário de $f^k(\bar{x})$ de $\bar{x}$ é $\bar{a}_k, \bar{a}_{k+1}, \dots, \bar{a}_{k+n}, \dots$, isto mostra que

$$f^k(\bar{x}) \in I(\bar{a}_k, \bar{a}_{k+1}, \dots, \bar{a}_{k+n}) = I(a_0, a_1, \dots, a_n),$$

e então $f^k(\bar{x})$ é o ponto na órbita $\mathcal{O}_f^+(\bar{x})$ que visita $I(a_0, a_1, \dots, a_n)$. Isto conclui a prova que $\mathcal{O}_f^+(\bar{x})$ visita todos os intervalos diádicos e portanto é densa. $\square$

Exercício 45. Explícite todos os intervalos da forma $I(a_1, a_2, a_3)$, com $a_1, a_2, a_3 \in \{0, 1\}$.

5. A FAMÍLIA QUADRÁTICA E HIPERBOLICIDADE

Definição 46. Seja p periódico de período n . p é hiperbólico se $|(f^n)'(p)| \neq 1$. Se $|(f^n)'(p)| > 1$ dizemos que p é um repulsor ou fonte e se $|(f^n)'(p)| < 1$ dizemos que p é um poço ou atrator.

Antes de discutir a família quadrática, vamos introduzir algumas definições ligadas à convergência e estabilidade de pontos periódicos.

Definição 47. Um ponto q é *positivamente assintótico* a p se $\lim_{j \rightarrow \infty} |f^j(q) - f^j(p)| = 0$. O conjunto estável de p é definido por

$$W^s(p) = \{q; \lim_{j \rightarrow \infty} |f^j(q) - f^j(p)| = 0\} \quad (5.1)$$

Se f tem inversa então um ponto q é *negativamente assintótico* a p se $\lim_{j \rightarrow -\infty} |f^j(q) - f^j(p)| = 0$. Neste caso, o conjunto instável de p é definido por

$$W^u(p) = \{q; \lim_{j \rightarrow -\infty} |f^j(q) - f^j(p)| = 0\} \quad (5.2)$$

Proposição 48. Seja p hiperbólico, fixo tal que $|f'(p)| < 1$. Então existe um intervalo aberto $U \ni p$ tal que se $x \in U$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = p$.

Demonstração. $f \in C^1$ então $\exists \epsilon > 0; |f'(x)| < \lambda < 1$ para $x \in (p - \epsilon, p + \epsilon)$.

Pelo Teorema do Valor Médio, temos

$$\begin{aligned} |f(x) - p| &= |f(x) - f(p)| \leq \lambda |x - p| < |x - p| \leq \epsilon \Rightarrow f(x) \in (p - \epsilon, p + \epsilon) \\ \Rightarrow |f^2(x) - f^2(p)| &\leq |f(x) - f(p)| \leq \lambda^2 |x - p| \leq \epsilon \Rightarrow f^2(x) \in (p - \epsilon, p + \epsilon) \\ \dots \Rightarrow |f^n(x) - p| &\leq \lambda^n |x - p| \Rightarrow f^n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} p. \end{aligned}$$

$\square$

Observação 49. $(p - \epsilon, p + \epsilon) \subset W^s(p)$.

Definição 50. Seja p periódico hiperbólico com período n . Se $|(f^n)'(p)| < 1$ dizemos que p é um atrator ou um poço. Analogamente, se $|(f^n)'(p)| > 1$, p é um repulsor ou uma fonte.

Observação 51. Pontos periódicos hiperbólicos: a dinâmica local é controlada pela derivada no ponto.

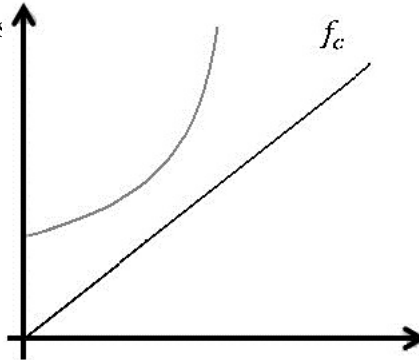
Exemplos:

- (a) $f(x) = x + x^3$, $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$.
- (b) $f(x) = x - x^3$, $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$.
- (c) $f(x) = x + x^2$, $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$.

Em dimensão 1, a maioria das aplicações tem pontos periódicos hiperbólicos (densidade dos Morse-Smale). No entanto, periódicos não hiperbólicos ocorrem frequentemente em famílias de aplicações. Quando isto ocorre dizemos que o ponto periódico passa por uma bifurcação.

Exemplo: $f_c(x) = x^2 + c$

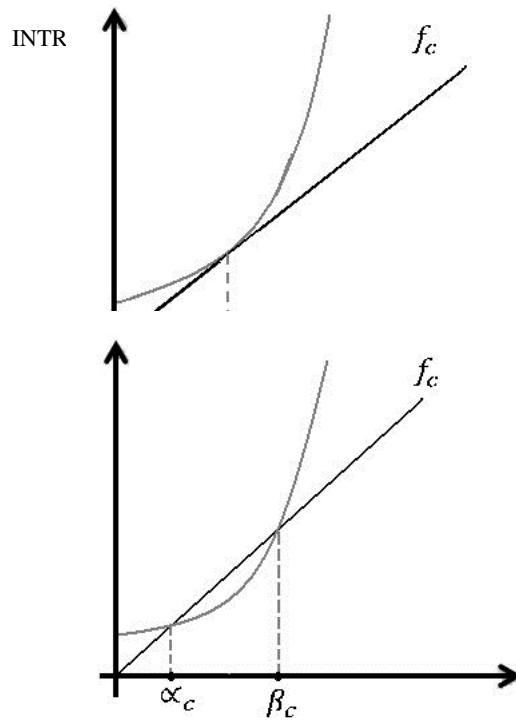
Se $c > \frac{1}{4}$: não tem pontos fixos



Se $c = \frac{1}{4}$: $f_c(1/2) = 1/2$ e $f'_c(1/2) = 1$.

Se $c < \frac{1}{4}$: α_c : atrator, β_c : repulsor.

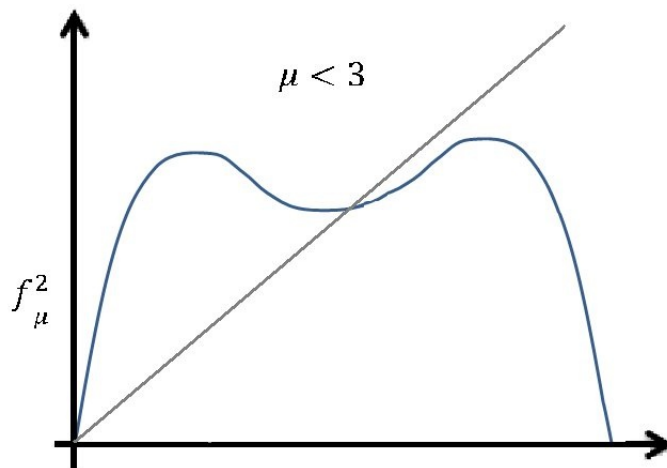
Portanto, o espaço de fase muda com c , dizemos que tem uma bifurcação em $c = 1/4$.



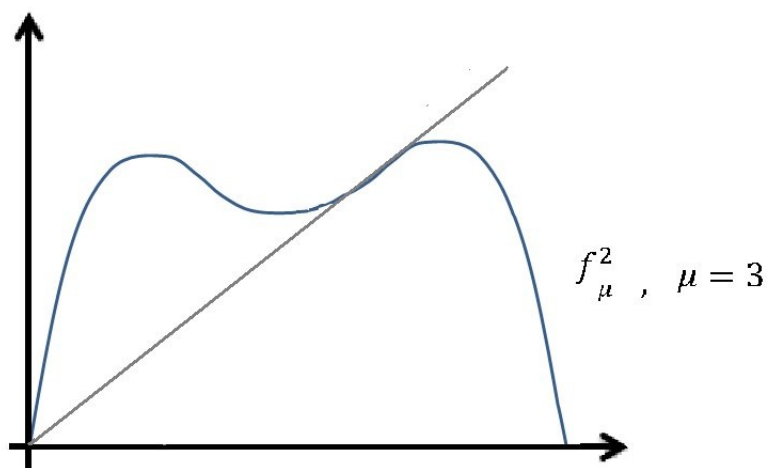
Exemplo: $f_\mu(x) = \mu x(1 - x)$, $\mu > 1$.

$$f_\mu(x) = x \Leftrightarrow \mu x(1 - x) - x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ e } p_\mu = \frac{\mu - 1}{\mu}.$$

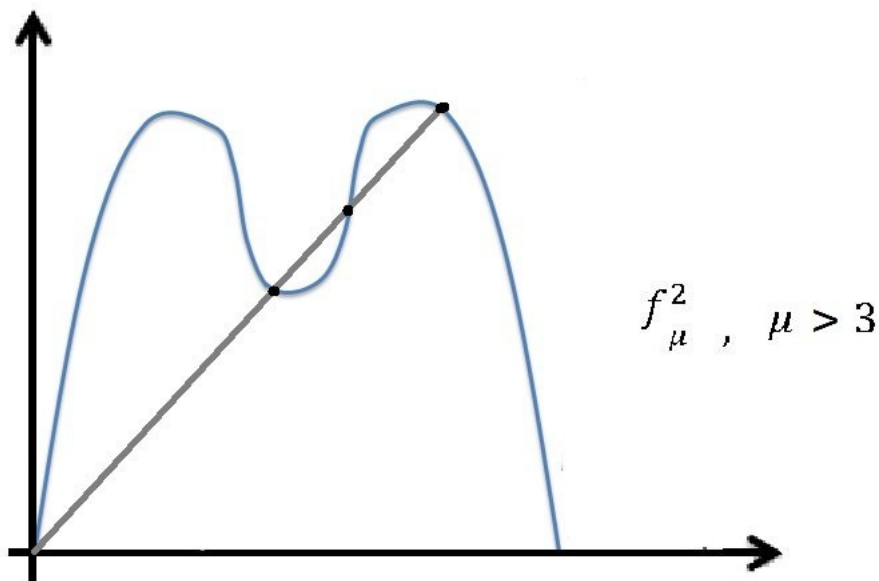
Então 0 é repulsor para μ



Quando $\mu = 3$, $f'_\mu(p_\mu) = -1$.



Observe que dois
periódicos de peri



A família quadrática

$$f_{\mu}(x) = \mu x(1 - x)$$

Fatos fáceis de serem verificados:

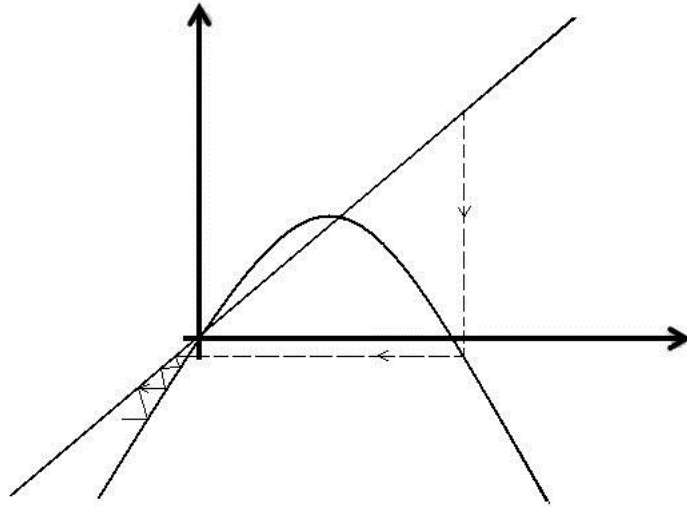
- (1) $f_{\mu}(0) = f_{\mu}(1) = 0$ e $f_{\mu}(p_{\mu}) = p_{\mu}$, $p_{\mu} = \frac{\mu-1}{\mu}$.
- (2) $0 < p_{\mu} < 1$ se $\mu > 1$.

Proposição 52. Suponha que $\mu > 1$. Se $x < 0$ então $f_{\mu}^n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$. Se $x > 1$, $f_{\mu}^n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$.

Demonstração. Se $x < 0$ então $f_{\mu}(x) = \mu x(1 - x) < x$ então $f_{\mu}^n(x)$ é uma sequência decrescente. Esta sequência não pode convergir para $p < 0$, pois neste caso teríamos

$$f_\mu^{n+1}(x) \rightarrow f_\mu(p) < p,$$

Do mesmo modo, para



$\cdot \infty$.

□

Consequência: A dinâmica interessante está em $[0, 1]$.

Proposição 53. *Seja $1 < \mu < 3$. Então*

- (a) *0 é fixo repulsor e $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$ é fixo atrator.*
- (b) *$0 < x < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_\mu^n(x) = p_\mu$*

Demonstração. (a) Basta conferir $|f'_\mu(0)| > 1$ e $|f'_\mu(p_\mu)| < 1$ para $1 < \mu < 3$.

(b) Primeiro para $1 < \mu < 2$.

$$x \in (0, 1/2] \Rightarrow |f_\mu(x) - p_\mu| < |x - p_\mu| \quad (\text{analisando o gráfico}) \text{ se } x \neq p_\mu.$$

Então

$$f_\mu^n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p_\mu.$$

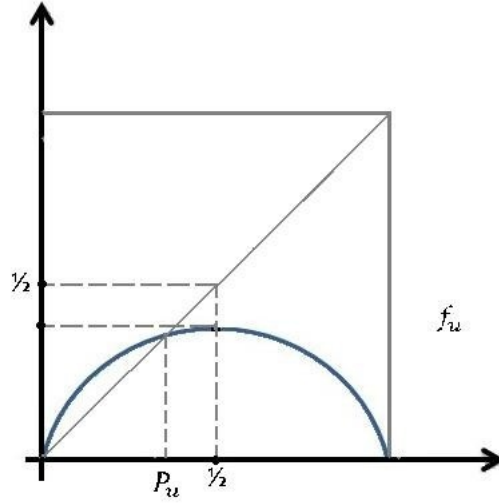
Se $x \in (1/2, 1)$ então $f_\mu(x) \in (0, 1/2)$ portanto segue o resultado.

Observe que para $1 < \mu < 2$, $f_\mu(1/2) < 1/2$ e aparece um atrator em $(0, 1/2)$.

Se $x \in (1/2, 1)$ então $f_\mu(x) \in (0, 1/2)$ e $1/2 > \mu/4$, ai aplica raciocínio anterior.

$p_\mu \leq 1/2 \Rightarrow f_\mu$ é crescente em $(0, p_\mu) \Rightarrow x \in ((0, p_\mu) \Rightarrow f_\mu^j(x) \rightarrow p_\mu$, em $(p_\mu, 1/2)$, f_μ é crescente gráfico abaixo de diagonal $\Rightarrow x \in (p_\mu, 1/2)$, $f_\mu^j(x) \rightarrow p_\mu$.

Para $2 < \mu < 3$, $f_\mu(1/2) > 1/2$ e a análise é mais fina. Neste caso, $1/2 < p_\mu < 1$. Defina



$$\hat{p}_\mu = 1 - p_\mu = \frac{1}{\mu}.$$

Então $f_\mu(\hat{p}_\mu) = f(p_\mu)$ e $|f'_\mu(p_\mu)| < 1$ e p_μ é atrator. Então

$$f_\mu^2[\hat{p}_\mu, p_\mu] \subset [1/2, p_\mu] \Rightarrow \text{se } x \in [\hat{p}_\mu, p_\mu] \text{ então } f_\mu^n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p_\mu.$$

Se $x < \hat{p}_\mu$ ou $x > p_\mu$, existe $k > 0$, $f_\mu^k(x) \in [\hat{p}_\mu, p_\mu]$ então

$$f_\mu^{k+n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p_\mu.$$

Como $(0, 1) = (0, \hat{p}_\mu) \cup [\hat{p}_\mu, p_\mu] \cup (p_\mu, 1)$ o resultado segue.

Para $\mu = 1/2$:

$$f_\mu(x) = \frac{1}{2}x(1-x), \quad f_\mu(1/2) = 1/8.$$

$$f_\mu(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow f'_\mu(x) = \frac{1}{2} - x \Rightarrow f'_\mu(1/2) = 0.$$

$$p_\mu = \frac{\mu - 1}{\mu} = \frac{-1/2}{1/2} = -1 < 0.$$

$$f'_\mu(0) = 1/2 < 1.$$

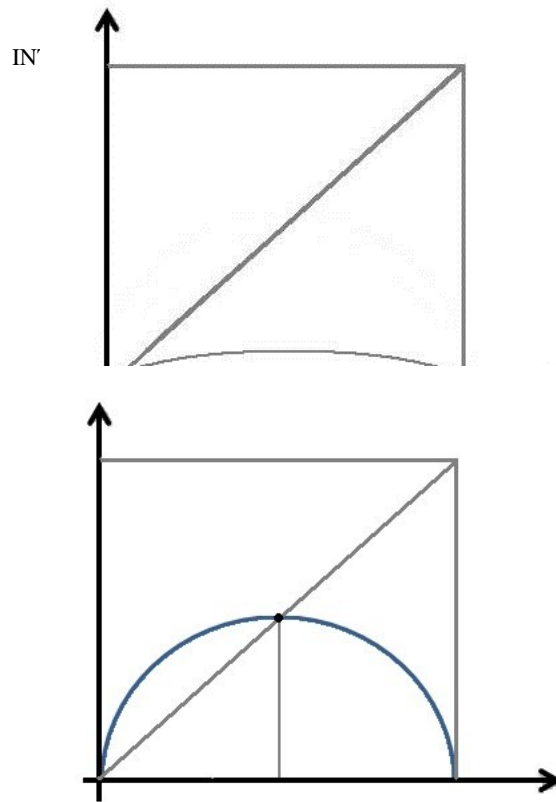
Portanto, 0 é atrator e $f_\mu^n(x) \rightarrow 0, \forall x$.

Para $\mu = 2$:

$$f_\mu(x) = 2x(1-x), \quad f_\mu(1/2) = 1/2.$$

$$f'_\mu(x) = 2 - 4x, \quad f'_\mu(1/2) = 2 - 2 = 0.$$

$$f_\mu^n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1/2.$$



□

Lema 54. Para $0 < \mu < 1$, 0 é atrator. Para $0 < \mu < 1$, p_μ é repulsor.

Demonstração. De fato, $f'_\mu(x) = \mu - 2\mu x$ então $f'_\mu(0) = \mu < 1$ e daí segue o primeiro resultado.

Agora, se $0 < \mu < 1$, $f'_\mu(p_\mu) = |2 - \mu| > 1$ e daí segue o segundo resultado. □

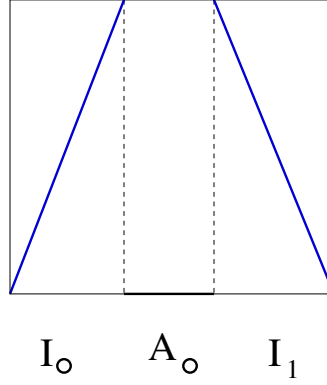
Quando $\mu < 1$, temos que $p_\mu < 0$ e não estamos interessados neste análise.

Então consideramos $\mu > 1$.

Observação 55. Para $\mu < 3$, p_μ é atrator. Para $\mu > 3$, p_μ é repulsor. Para $\mu = 3$, $f'_3(p_3) = |2 - \mu| = |2 - 3| = 1$ parâmetro de bifurcação.

Como foi visto antes, quando μ passa por 3, um novo ponto periódico de período 2 nasce. Conforme μ cresce, a dinâmica vai ficando dramaticamente mais complicada.

5.1. O caso $\mu > 4$. Agora vamos olhar $f_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ para $\mu > 4$. Vamos omitir o μ na análise: $f_\mu = f$.



Como $\mu > 4 \Rightarrow f(1/2) > 1 \Rightarrow$ certos pontos deixam I quando iterador por f . Denotamos estes pontos por A_0 .

Seja $A_1 = \{x \in I : f(x) \in A_0\}$,

$$x \in A_1 \Rightarrow f^2(x) > 1 \Rightarrow f^3(x) < 0 \Rightarrow f^n \rightarrow -\infty.$$

$$A_n = \{x \in A_{n-1} : f^n \in A_0\} = \{x : f^i(x) \in I \text{ para } i \leq n \text{ e } f^{n+1}(x) \notin I\}.$$

Portanto,

$$x \in A_n \Rightarrow f^n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty.$$

Então temos que estudar

$$I \setminus (\cup_{n=0}^{\infty} A_n) = \Lambda.$$

Note que como A_0 : é o intervalo aberto centrado em $1/2$, $I \setminus A_0 = I_0 \cup I_1$, com I_i , $i \in \{0, 1\}$ intervalo fechado.

Observe que f é crescente em I_0 , f é decrescente em I_1 , $f(I_0) = f(I_1) = I$, então $\exists$ par de intervalos abertos A_{00} e A_{01} , $A_{00} \subset I_0$, $A_{01} \subset I_1$, com $f(A_{00}) = A_0$ e $f(A_{01}) = A_0$, $A_{00} \cup A_{01} = A_1$.

Agora observe que $I \setminus (A_0 \cup A_1)$ consiste de 4 intervalos fechados, cada um é levado por f monotonicamente em I_0 ou I_1 e consequentemente f^2 leva cada um deles em I e portanto $I \setminus (A_0 \cup A_1)$, contém um intervalo aberto que é levado por f^2 em A_0 .

Então pontos neste intervalo depois de 3 iterações escapam de I . Este conjunto é A_2 .

Continuando observamos que A_n é uma união de 2^n intervalos abertos dois a dois disjuntos.

Dai, $I \setminus (A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_n)$ consiste de 2^{n+1} intervalos fechados pois

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

Além disto, f^{n+1} leva cada um destes intervalos monotonicamente em I . De fato, o gráfico de f^{n+1} é alternativamente crescente e decrescente nestes intervalos. Então o gráfico de f^n cruza a diagonal em pelo menos 2^n pontos. Portanto $P_n(f)$ contem 2^n pontos em I .

Portanto a estrutura de Λ é bastante complicada.

Definição 56. Λ é conjunto de Cantor se é fechado, totalmente desconexo e perfeito. (Totalmente desconexo se não contém intervalos, perfeito se todo ponto nele é de acumulação ou ponto limite dele mesmo).

Vamos verificar que Λ é um conjunto de Cantor.

Para garantir que Λ é um conjunto de Cantor mais facilmente, vamos assumir que $\mu > 2 + \sqrt{5}$. Isto implica que $|f'(x)| > 1$, $\forall x \in I_0 \cup I_1$.

Observação: Como aparecem o número $2 + \sqrt{5}$. Queremos garantir $|f'(x)| > \lambda > 1$ para todo $x \in I \setminus A_0$. Para isso, como f é montona crescente nestes intervalos, basta encontrar o parâmetro μ para o qual $f_\mu(x) = 1$ satisfaz $|f'_\mu(x)| > 1$. Assim, calculamos

$$f(x) = 1 \Rightarrow \mu x(1 - x) = 1 \Rightarrow \mu x - \mu x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_\pm = \frac{\mu \pm (\mu^2 - 4\mu)^{1/2}}{2\mu}.$$

Temos

$$f'_\mu(x_\pm) = (\mu^2 - 4\mu)^{1/2} \text{ e } f'_\mu(x_\pm) > 1 \Rightarrow (\mu^2 - 4\mu)^{1/2} > 1$$

logo $\mu^2 - 4\mu - 1 > 0$ e assim,

$$\mu > 2 \pm \sqrt{5}.$$

Então, para $\mu > 2 + \sqrt{5}$, $\exists \lambda > 1$ tal que $|f'(x)| > \lambda$, $\forall x \in \Lambda \Rightarrow |(f^n)'(x)| > \lambda^n \forall n$.

Afirmção 1: Λ não contém intervalos, caso contrário, $\exists x, y \in \Lambda$, $[x, y] \subset \Lambda$. Então, para todo $z \in [x, y]$, $|(f^n)'(z)| > \lambda^n$. Tome n tal que $\lambda^n |y - x| > 1$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, $|f^n(y) - f^n(x)| \geq \lambda^n |y - x| > 1$ então ou $f^n(y)$ ou $f^n(x) \notin I$, contradição.

Como Λ é uma sequência encaixante de intervalos fechados segue que Λ é fechado.

Λ é perfeito: De fato, note que todo extremo de A_k está em Λ , tais pontos não enviados eventualmente em 0 e portanto permanecem em I quando iterados.

Se $\exists p \in \Lambda$ isolado, toda vizinhança de p deve escapar de I , tais pontos pertencem a algum A_k . Então ou existem sequências de extremos de A_k convergindo para p ou todos os pontos numa vizinhança de p são levados para fora de I . No primeiro caso estamos feitos. No segundo, assume $f^m(p) = 0$, e todos os outros por f^m na vizinhança são negativos,

então f^m tem máximo em p . e portanto

$$(f^n)'(p) = 0 \Rightarrow \exists i < n; f'((f^i))(p) = 0 \Rightarrow f^i(p) = 1/2 \Rightarrow f^{i+1}(p) \notin I$$

E isto finalmente implica que $f^n(p) \rightarrow -\infty$, contradição de novo.

6. A FERRADURA DE SMALE

O objetivo é descrever um difeomorfismo $f : S^2 \rightarrow S^2$ devido a Smale, denominado *ferradura*. Este foi o primeiro exemplo de um difeomorfismo estruturalmente estável com infinitos pontos periódicos.

No "polo norte" de S^2 colocamos uma fonte hiperbólica σ_1 , e de modo que todo o hemisfério norte, H_+ , incluindo o equador, pertença a $W^u(\sigma_1)$.

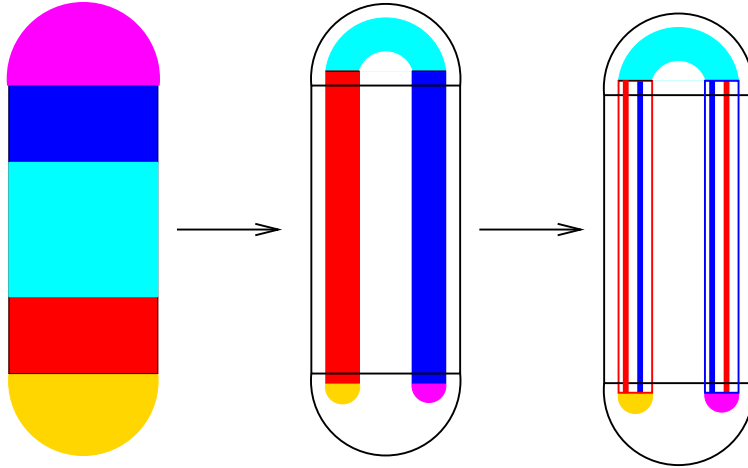
Então $f(H_+) \subset H_-$, onde H_+ e H_- denotam o hemisfério norte e sul respectivamente.

A seguir descrevemos f em H_- . de um retângulo central Q e dois semi-discos D_1 e D_2 .

A ferradura f leva H_- dentro de H_- do seguinte modo.

Primeiro, contrai linearmente Q na direção horizontal por um fator $0 < \delta < 1/4$ e expande Q na direção vertical por um fator $1/\delta$, de modo que após a ação de f , fica longo e fino.

Então coloque Q de volta em H_- na forma de ferradura, como no esquema da figura abaixo.



Observe que a pre-imagem de Q consiste de dois retângulos horizontais $\tilde{R}_0$ e $\tilde{R}_1$ que podemos assumir que são levados linearmente sobre as duas componentes verticais R_0 e R_1 de $f(Q) \cap Q$. A altura de R_0 e R_1 é δ e a largura de R_0 e R_1 é δ também.

Nos retângulos $\tilde{R}_0$ e $\tilde{R}_1$ o difeomorfismo é linear. Portanto, preserva linhas horizontais e verticais, contraindo as horizontais por δ e expandindo as verticais por $1/\delta$.

Como f é uma contração em D_1 , tem um único ponto fixo $p \in D_1$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(q) = p, \quad \forall \quad q \in D_1.$$

Como $f(D_2) \subset D_1$, todas as órbitas positivas em D_2 se comportam do mesmo modo, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(q) = p, \quad \forall \quad q \in D_2.$$

Do mesmo modo, se $q \in Q$ mas $f^k(q) \notin Q$ para algum $k > 0$, então $f^k(q) \in D_1 \cup D_2$ e portanto $f^n(q) \rightarrow p$ quando $n \rightarrow \infty$.

Concluimos que quando $x \in H_-$ e $x \neq p$, x é não errante se e só se sua órbita está inteiramente contida em Q .

Se $x \in H_+$ e $x \neq p$ e não é o polo norte, então x é errante pois neste caso $x \in W^u(\sigma)$.

Portanto, se $x \in \Omega(f)$, $x \neq p$, temos $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(Q) = \Lambda$.

A seguir vamos descrever Λ e a dinâmica de f/Λ .

Observe que $Q \cap f(Q)$ tem duas componentes retangulares, R_0 , R_1 , e $Q \cap f(Q) = R_0 \cup R_1$.

$Q \cap f(Q) \cap f^2(Q)$ tem quatro componentes e assim sucessivamente.

Temos:

$$Q \cap f(Q) \cap f^2(Q) = R_{00} \cup R_{01} \cup R_{10} \cup R_{11}.$$

$$f(R_0) \cap Q = R_{00} \cup R_{10}, \quad R_{00} \subset R_0, \quad R_{10} \cap R_0 = \emptyset.$$

$$f(R_1) \cap Q = R_{01} \cup R_{11}, \quad R_{11} \subset R_1, \quad R_{01} \cap R_1 = \emptyset.$$

Em geral, dada qualquer sequência $a_0 a_1 \cdots a_N$, $a_i \in \{0, 1\}$, temos que

$$R_{a_0 a_1 \cdots a_N} = R_{a_0} \cap f(R_{a_1} \cap \cdots \cap f^N(R_{a_N})).$$

Afirmamos que $R_{a_0 a_1 \cdots a_N}$ formam uma sequência encaixante de retângulos fechados, não vazios.

Note que

$$R_{a_0 a_1 \cdots a_N} = R_{a_0} \cap f(R_{a_1 a_2 \cdots a_N}).$$

Vamos provar por indução. Por esta hipótese, assumimos que $R_{a_0 a_1 \cdots a_N} \neq \emptyset$ é um retângulo não vazio.

Por construção, $f(R_{a_0 a_1 \dots a_N})$ consiste de dois retângulos, um em R_0 e outro em R_1 . Assim, $R_0 \cap f(R_{a_0 a_1 \dots a_N})$ é um único retângulo. fechado.

Estes retângulos são encaixados porque

$$R_{a_0 a_1 \dots a_N} = R_{a_0 a_1 \dots a_{N-1}} \cap f(R_{a_N}) \subset R_{a_0 a_1 \dots a_{N-1}}.$$

Concluimos que

$$\bigcap_{n \geq 0} R_{a_0 a_1 \dots a_N} \neq \emptyset.$$

Agora seja h qualquer linha horizontal com $h \cap Q \neq \emptyset$ e coloque $[a, b] = h \cap Q$. Então $f([a, b]) \cap f(Q)$ é a união de dois intervalos fechados que são obtidos de $[a, b]$ removendo-se três segmentos abertos distintos. De cada um destes dois segmentos removemos abertos da forma $[a, b] \cap f(Q) \cap f^2(Q)$ e assim por diante. Então $[a, b] \cap [\bigcap_{n \geq 0} f^n(Q)] = K_1$ é um conjunto de Cantor.

Denotando $\Lambda_+ = \bigcap_{n \geq 0} f^n(Q)$, obtemos que $\Lambda_+ = K_1 \times I$, onde I é um intervalo vertical. E concluimos que Λ_+ é o produto de um Cantor por um intervalo.

Do mesmo modo $\Lambda_- = \bigcap_{n \leq 0} f^n(Q) = K_2 \times H$, onde K_2 é um Cantor e H é um intervalo. Então $\Lambda = \Lambda_+ \cap \Lambda_- \neq \emptyset$. Claro que $f(\Lambda) \subset \Lambda$.

6.1. Codificando a ferradura. A cada ponto $x \in \Lambda$, associamos uma sequência $a_0 a_1 \dots a_n$ com $a_i \in \{0, 1\}$ como segue:

$$a_n(x) = 0 \text{ se } f^n(x) \in R_0; \quad a_n(x) = 1 \text{ se } f^n(x) \in R_1.$$

Assim, temos uma aplicação $\psi : \Lambda \rightarrow \prod_{-\infty}^{\infty} \{0, 1\}$ que associa, a cada $x \in \Lambda$, a sequência $\psi(x) = (a_n(x))_n$ de 0's e 1's definida como acima.

Vamos denotar por Σ_2 o espaço produto $\prod_{-\infty}^{\infty} \{0, 1\}$, com a topologia produto. Como vimos, Σ_2 é completo, perfeito e totalmente desconexo.

Observe que uma base de abertos para a topologia de Σ_2 é dada pelos *cilindros*

$$\mathcal{C}(\epsilon_1 \epsilon_2 \dots \epsilon_k; i_1 i_2 \dots i_k), \epsilon_j \in \{0, 1\},$$

que consiste das sequências $(a_n)_n \in \Sigma$, com $a_{ij} = \epsilon_j$.

A aplicação deslocamento $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ é definida por $(\sigma(a_n))_k = a_{k+1}$.

Temos que o diagrama comuta, ou seja, $\sigma \circ \psi = \psi \circ f/\Lambda$.

$$\begin{array}{ccc}
\Lambda & \xrightarrow{f} & \Lambda \\
\downarrow \psi & \hookrightarrow & \downarrow \psi \\
\Sigma & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma
\end{array}$$

Teorema 57. *A transformação $f/(\Omega(f) \cap Q)$ é topologicamente conjugada a aplicação deslocamento σ .*

Demonstração. Basta provar que a aplicação ψ definida acima é um homeomorfismo. Para isso procedemos do modo seguinte.

Já sabemos que $\Omega(f) \cap Q \subset \Lambda$. A outra inclusão será consequência do restante da prova, desde que todo ponto de Σ_2 é não errante para a aplicação σ .

Afirmção 5. *ψ é contínua.*

Demonstração. Prova do Claim. Tome um cilindro aberto

$$\mathcal{C}(\psi(x), N) = \{(s_i)_i \in \Sigma_2; s_i = (\psi(x))_i, \quad |i| \leq N\}.$$

Para cada i , $|i| \leq N$, escolha uma bola $B_{\delta_i}(f^i(x))$ com δ_i suficientemente pequeno para que não intersekte as componentes de $Q \cap f(Q)$ que não contém $f^i(x)$.

Para todo i , $-N \leq i \leq N$, $\Lambda \cap F^{-i}(B_{\delta_i}(f^i(x)))$ é uma vizinhança de $x \in \Lambda$.

Do mesmo modo,

$$B_N(x) = \bigcap_{|i| \leq N} (\Lambda \cap f^{-i}(B_{\delta_i}(f^i(x))))$$

é também uma vizinhança de x em Λ .

Pela construção, $\psi(B_N(x)) \subset \mathcal{C}(\psi(x); N)$ e portanto ψ é contínua. $\square$

Afirmção 6. *A aplicação ψ é injetiva.*

Demonstração. Sejam x, y tais que $\psi(x) = \psi(y)$. Provaremos primeiro que se a parte positiva das sequências coincidem, isso é, $(\psi(x))_i = (\psi(y))_i$, $i \geq 0$, então as ordenadas de x e y são iguais.

De fato, temos que $(f^i(x))$ e $(f^i(y))$ pertencem ao mesmo retângulo vertical de $f(Q) \cap Q$ e também ao mesmo retângulo horizontal de $f^{-1}(Q) \cap Q$ porque $f^{i+1}(x)$ e $f^{i+1}(y)$ pertencem ao mesmo retângulo vertical.

Do fato que $(f^i(x))$ e $(f^i(y))$ pertencem ao mesmo retângulo horizontal de $f^{-1}(Q) \cap Q$ concluímos

$$|\text{ord}(f^{i+1}(y)) - \text{ord}(f^{i+1}(x))| = \delta |\text{ord}(f^i(y)) - \text{ord}(f^i(x))|$$

onde δ é a expansão vertical de f em $\tilde{R}_0 \cup \tilde{R}_1$, $\delta > 1$.

Assim, para todo n ,

$$|\text{ord}(f^n(y)) - \text{ord}(f^n(x))| = \delta^n |\text{ord}(y) - \text{ord}(x)|$$

que leva a um absurdo pois f^x e $f^n(y)$ pertencem a Q para n . Portanto, $x = y$. $\square$

Afirmção 7. A aplicação ψ é sobrejetiva.

Demonstração. Como já definimos, se $\alpha = (a_0 a_1 \cdots a_N)$ é uma sequência de 0's e 1's então

$$R_\alpha = R_{a_1} \cap f(R_{a_1}) \cap \cdots \cap f^N(R_{a_N}) \neq \emptyset.$$

Dada $\bar{s} \in \Sigma_2$, $\bar{s} = (s_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, queremos mostrar que

$$R_s = \bigcap_{-\infty}^{\infty} i(R_{s_i}) \neq \emptyset.$$

De fato, se $x \in R_s$ então $f^i(x) \in R_{s_i}$, $\forall i$ e $\psi(x) = (s_i)_{i \in \mathbb{Z}}$.

Para mostrar, basta mostrar que a intersecção correspondente a sequência finitas é não vazia, pois

$$R_{s,N} = \bigcap_{-N}^N f^i(R_{s_i}) \neq \emptyset, \forall N > 0$$

e o fato que esta sequência é encaixante implicam

$$R_s = \bigcap_{N \in \mathbb{Z}} R_{s,N} \neq \emptyset.$$

$\square$

$\square$

6.2. Ferradura na aplicação de Henón. A aplicação $H_{a,b} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$H_{a,b}(x, y) = (a + by - x^2, x), \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad (6.1)$$

foi introduzida por M. Hénon nos anos 70 para estudar comportamentos dinâmicos complexos.

Se $b \neq 0$, $H_{a,b}$ tem inversa e sua inversa dada por

$$H_{a,b}^{-1}(x, y) = \left(y, \frac{x + y^2 - a}{b}\right). \quad (6.2)$$

Observação 58. Se $b = 0$ então $H_{a,0}$ não é invertível e $H_{a,0}(x, y) = (a - x^2, x)$, ou seja, representa o gráfico da parábola $x = a - y^2$.

Para simplificar a notação, para a e b fixados, escrevemos $H = H_{a,b}$.

Exercício 59. Verifique que $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é ponto fixo de H se e somente se $x = y = 1/2(b - \pm\sqrt{(b-1)^2 + 4a})$.

A derivada de DH é dada por

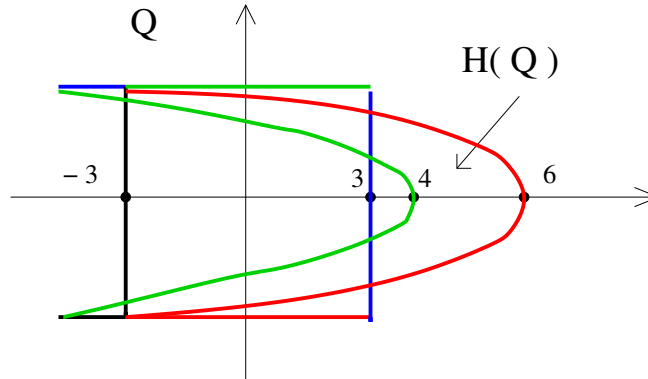
$$DH(x, y) = \begin{bmatrix} -2x & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dai segue que os auto-valores são $\lambda_{1,2} = -x \pm \sqrt{x^2 + b}$ e os respectivos auto-vetores são $v_1 = (1, \lambda_1)$ e $v_2 = (1, -\lambda_2)$. O determinante de $DH(x, y)$ é igual a $-b$. Vamos estudar a aplicação de Hénon para $0 < |b| < 1$, que corresponde aos valores de b que H contrai área. Observe que para $b < 0$ H preserva orientação e para $b > 0$ inverte orientação.

Dado $r > 0$, considere o quadrado

$$Q_r = \{(x, y); |x| \leq r, |y| \leq r\}.$$

Para $r = 3$, a imagem de cada reta horizontal $y = y_0$ é a parábola $x = a + by_0 - y^2$, com vértice no eixo- x . A imagem de cada reta vertical $x = x_0$ é uma reta horizontal $y = x_0$. Do mesmo modo, a inversa H^{-1} de H envia a reta horizontal $y = y_0$ na reta vertical $x = y_0$ e a reta vertical $x = x_0$ na parábola $y = (x_0 - a + x^2)/b$ com vértice no eixo- y . A figura abaixo exhibe a ação de H e H^{-1} no quadrado Q_3 .



Exercício 60. Determine os valores mínimos dos parâmetros r, a, b para que $H(Q_r)$ seja uma ferradura.

7. DIFEOMORFISMO DE ANOSO E O DERIVADO DE ANOSOV

Apresentamos um exemplo de um atrator perturbando um difeomorfismo linear de Anosov $f_A : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$ numa vizinhança do ponto fixo. Este exemplo foi introduzido por S. Smale no ano 1967.

Começamos com um automorfismo linear $f_A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ induzido, por simplicidade, pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A ideia é perturbar o ponto fixo para torná-lo um ponto fixo repulsor. Para $d > 2$ a perturbação busca trocar o índice do ponto fixo. Este novo difeomorfismo se chama *difeomorfismo derivado de Anosov* ou *DA-difeomorfismo*.

Neste trabalho, daremos duas construções do DA-difeomorfismo, ambas são totalmente similares, só que a primeira é uma construção mais explícita, o que permite fazer cálculos mais simples, como por exemplo calcular os pontos fixos e mostrar que eles são hiperbólicos, ou determinar o espaço estável através de campos de cones. Em fim, a primeira construção permite-nos trabalhar com contas explícitas e descrever o exemplo de uma forma mais singela. Achamos que para uma primeira aproximação ajudará à visualização deste novo difeomorfismo.

A segunda construção é bastante teórica onde o estudo das variedades estável e instável são essenciais para entender as novas propriedades do DA-difeomorfismo.

7.1. Preliminares: Anosov no toro $\mathbb{T}^2$. Antes de introduzir o DA-difeomorfismo, lembremos algumas propriedades da transformação linear A e a função f_A .

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ a projeção canônica. À transformação linear representada pela matriz A escrevemos também por A . Esta transformação induz uma aplicação $f_A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ definida pelo seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^2 \\ \downarrow \pi & \hookrightarrow & \downarrow \pi \\ \mathbb{T}^2 & \xrightarrow{f_A} & \mathbb{T}^2 \end{array}$$

A aplicação f_A se chama **automorfismo toral** ou **difeomorfismo de Anosov** no toro. É fácil ver que f_A tem um único ponto fixo, $p_0 = \pi(0, 0)$.

7.2. Propriedades de f_A . A transformação A tem dois autovalores $\lambda_u = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ e $\lambda_s = \lambda_u^{-1} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Se observa que $\lambda_u > 1 > \lambda_s > 0$. Os autovetores são $v_u = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}, 1\right)$ e $v_s = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1\right)$. Como $v_s \cdot v_u = 0$ segue que eles são ortogonais. Denotamos os autoespaços associados por

$$E^u(p_0) = \left\langle \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1 \right) \right\rangle = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}x \right\} = \left\{ \left(t, \frac{\sqrt{5}-1}{2}t \right) : t \in \mathbb{R} \right\}$$

e

$$E^s(p_0) = \left\langle \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1 \right) \right\rangle = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}x \right\} = \left\{ \left(t, -\frac{\sqrt{5}+1}{2}t \right) : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Como f_A é um difeomorfismo de Anosov, temos uma decomposição $\mathbb{R}^2 = E^s(p_0) \oplus E^u(p_0)$. Estes espaços são chamados espaço estável ($E^s(p_0)$) e espaço instável ($E^u(p_0)$) em p_0 , respectivamente.

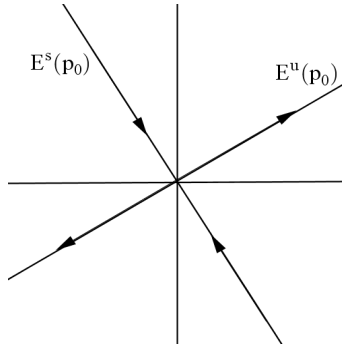


FIGURA 1. Os espaços estáveis e instáveis em p_0 , $E^u(p_0)$ e $E^s(p_0)$.

Consideramos no toro $\mathbb{T}^2$ a métrica induzida pela métrica euclidiana de $\mathbb{R}^2$, isto é, se $p = \pi(x_1, y_1)$, $q = \pi(x_2, y_2)$ são dois pontos em $\mathbb{T}^2$, então

$$\tilde{d}(p, q) = \min\{d((x_1 + n, y_1 + m), (x_2, y_2)) : n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Podemos ver que

$$\pi(E^s(p_0)) = W^s(p_0) = \left\{ y \in \mathbb{T}^2 : \tilde{d}(f_A^n(y), f_A^n(p_0)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \right\}$$

e

$$\pi(E^u(p_0)) = W^u(p_0) = \left\{ y \in \mathbb{T}^2 : \tilde{d}(f_A^{-n}(y), f_A^{-n}(p_0)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \right\}.$$

Mais geralmente $\pi((x, y) + E^s(p_0)) = W^s(\pi(x, y))$ e $\pi((x, y) + E^u(p_0)) = W^u(\pi(x, y))$.

Lembremos também que

$$f_A(W^s(p)) \subseteq W^s(f_A(p)) \quad \text{para todo } p \in \mathbb{T}^2. \quad (7.1)$$

Um resultado análogo tem-se para $W^u(p)$. Além disso,

Teorema 61. *Os conjuntos $W^u(p)$ e $W^s(p)$ são densos em $\mathbb{T}^2$ para todo $p \in \mathbb{T}^2$.*

Prova: Provaremos so para $W^s(p_0)$, pois os outros casos são inteiramente análogos. Seja $q = \pi(x_0, y_0) \in \mathbb{T}^2$ e ponhamos $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, então o conjunto $\{\alpha n + m : n, m \in \mathbb{Z}\}$ é denso em $\mathbb{R}$. Por tanto, considerando $t = y_0 - \alpha x_0$ e $\varepsilon > 0$, existem $n, m \in \mathbb{Z}$ tais que $|\alpha n + m - (y_0 - \alpha x_0)| < \varepsilon$. Seja $q_s = \pi(x_0 + n, \alpha(x_0 + n)) \in W^s(p_0)$, então

$$\begin{aligned} \tilde{d}(q, q_s) &= \min\{d((x_0 + n', y_0 + m'), (x_0 + n, \alpha(x_0 + n))) : n', m' \in \mathbb{Z}\} \\ &= \min\{d((n' - n, y_0 - \alpha x_0 - \alpha n + m')) : n', m' \in \mathbb{Z}\} \\ &\leq |y_0 - \alpha x_0 - \alpha n + m| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, W^s é denso em $\mathbb{T}^2$.

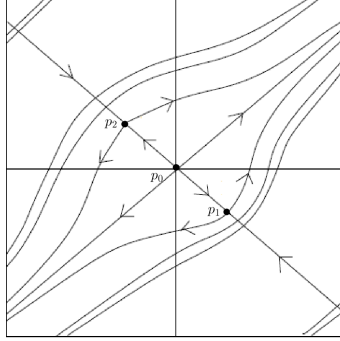
No teorema acima, mostramos que se L é uma reta em $\mathbb{R}^2$ com declive irracional, então $\pi(L)$ é densa em $\mathbb{T}^2$.

Exercício 62. Seja $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Prove que o conjunto $\{\alpha n + m : n, m \in \mathbb{Z}\}$ é denso em $\mathbb{R}$.

Teorema 63. *Os pontos periódicos de f_A são densos no toro $\mathbb{T}^2$.*

Para começar na construção do DA-difeomorfismo, seja U uma vizinhanza de p_0 . Introduzimos o cambio de coordenadas na base $\{v_u, v_s\}$. Então, cada vetor $v = u_1 v_u + u_2 v_s \in U$ queda escrito em esta base da forma (u_1, u_2) . Trabalharemos em U com as (u_1, u_2) -coordenadas. Observe que a variedade inestável de p_0 são os pontos da forma $(u_1, 0)$ e os pontos da variedade inestável em p_0 são da forma $(0, u_2)$. Portanto, $f_A(u_1, u_2) = (\lambda_u u_1, \lambda_s u_2)$ em U .

7.3. Primeira construção: seguindo Katok-Hasselblatt. Aqui vamos seguir de perto o livro de A. Katok e B. Hasselblatt.



Seja $\phi = \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ uma função C^∞ tal que

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \phi(-t) \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}, \\ \phi(t) &= \begin{cases} 1 & \text{se } |t| \leq 1/8 \\ 0 & \text{se } |t| \geq 1/4 \end{cases} \\ \phi'(t) &< 0 \quad \text{se } 1/8 < t < 1/4.\end{aligned}$$

Seja $k > 0$ suficientemente grande (será escolhido mais tarde no teorema 2.1). Definamos o **difeomorfismo derivado de Anosov**, $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, por

$$f|_{\mathbb{T}^2 \setminus U} = f_A|_{\mathbb{T}^2 \setminus U}$$

e

$$\begin{aligned}f(u_1, u_2) &= f_A(u_1, u_2) + (0, (2 - \lambda_s)\phi(u_1)\phi(ku_2)u_2) \\ &= (\lambda_u u_1, \lambda_s u_2 + (2 - \lambda_s)\phi(u_1)\phi(ku_2)u_2) \quad (u_1, u_2) \in U.\end{aligned}$$

É fácil ver que f não tem pontos fixos fora de U , pois f coincide com f_A em $\mathbb{T}^2 \setminus U$ e o único ponto fixo de f_A é $p_0 \in U$. Portanto, encontrar os pontos fixos para f é resolver a equação $f(p) = p$ com $p \in U$. Isto é, pela definição de f em U , resolver o sistema

$$\begin{aligned}u_1 &= \lambda_u u_1 \\ u_2 &= \lambda_s u_2 + (2 - \lambda_s)\phi(u_1)\phi(ku_2)u_2\end{aligned}$$

Da primeira equação, temos que $u_1 = 0$. Da segunda equação, (com $u_1 = 0$) tem-se que

$$\begin{aligned}u_2 &= \lambda_s u_2 + (2 - \lambda_s)\phi(ku_2)u_2 \\ 0 &= [1 - \lambda_s - (2 - \lambda_s)\phi(ku_2)]u_2\end{aligned}$$

logo, $u_2 = 0$ ou $1 - \lambda_s - (2 - \lambda_s)\phi(ku_2) = 0$. Esta equação é equivalente a

$$0 < \phi(ku_2) = \frac{1 - \lambda_s}{2 - \lambda_s} < 1.$$

Como ϕ é contínua, pelo teorema do valor intermédio, existe $\bar{u}_2 \in (\frac{1}{8k}, \frac{1}{4k})$ tal que $\phi(k\bar{u}_2) = \frac{1 - \lambda_s}{2 - \lambda_s} = \lambda_s$. Além disso, como ϕ é uma função par, $-\bar{u}_2$ satisfaz $\phi(-k\bar{u}_2) = \phi(k\bar{u}_2)$ e, como $(0, \bar{u}_2) - (0, -\bar{u}_2) = (0, 2\bar{u}_2) \notin \mathbb{Z}^2$, pois $0 < \bar{u}_2 < 1/4$, temos que existem tres pontos fixos para f , a saber;

$$p_0, \quad p_1 = (0, \bar{u}_2) \quad \text{e} \quad p_2 = (0, -\bar{u}_2).$$

Observe agora que para todo $q = (u_1, u_2) \in U$

$$Df(q) = Df_q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ h_1(u_1, u_2) & h_2(u_1, u_2) \end{pmatrix}$$

onde $h_1(u_1, u_2) = (2 - \lambda_s)\phi'(u_1)\phi(ku_2)u_2$ e $h_2(u_1, u_2) = \lambda_s + (2 - \lambda_s)\phi(u_1)(\phi'(u_2)ku_2 + \phi(ku_2))$. Em particular,

$$Df_{p_0} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad Df_{p_1} = Df_{p_2} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_s + (2 - \lambda_s)(\phi'(\bar{u}_2)k\bar{u}_2 + \phi(k\bar{u}_2)) \end{pmatrix}$$

Agora,

$$\lambda_s + (2 - \lambda_s)(\phi'(\bar{u}_2)k\bar{u}_2 + \phi(k\bar{u}_2)) = 1 + (2 - \lambda_s)(\phi'(k\bar{u}_2)k\bar{u}_2) < 1$$

o que diz que p_0 é um ponto repulson e os pontos p_1 y p_2 são hiperbólicos.

Por outro lado, como p_0 é um ponto fixo repulsor de f , existe U_0 uma vizinhança de p_0 que contém a $W_{loc}^u(p_0, f)$ tal que $W^u(p_0, f) = \bigcup_{j=0}^{\infty} f^j(U_0)$. Ponhamos $\Lambda = \mathbb{T}^2 \setminus W^u(p_0, f)$.

Teorema 64. *Para qualquer k suficientemente grande, Λ é um conjunto hiperbólico.*

7.4. Segunda construção-Inspirando-se em Robinson. A segunda construção foi inspirada no livro de Clark Robinson. Aquí, é apresentada uma generalização do difeomorfismo mostrado acima.

Usando as mesmas notações que antes, seja $\delta(x)$ uma função “galo”definida por

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \geq r_0 \\ 1 & \text{se } x \geq r_0/2 \end{cases}$$

onde r_0 é tal que $B(p_0, r_0) \subseteq U$.

Consideremos ainda as equações diferenciais

$$\begin{aligned}\dot{u}_1 &= 0 \\ \dot{u}_2 &= u_2 \delta(|(u_1, u_2)|)\end{aligned}\tag{7.2}$$

Seja ϕ^t o fluxo de (7.2): $\phi^t(u_1, u_2) = (u_1, \phi_2^t(u_1, u_2))$. Em uma pequena vizinhança de p_0 temos que (7.2) implica

$$\begin{aligned}\dot{u}_1 &= 0 \\ \dot{u}_2 &= u_2\end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned}u_1(t) &= u_1 \\ u_2(t) &= u_2 e^t.\end{aligned}$$

Logo, $\phi^t(u_1, u_2) = (u_1, u_2 e^t)$, suficientemente próximo de p_0 . Portanto

$$D\phi_{p_0}^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix}.$$

Definimos o **derivado de Anosov** como

$$f = \phi^\tau \circ f_A \quad e^\tau \lambda_s > 1.$$

Observa-se também que

$$Df_{p_0} = D\phi_{p_0}^\tau Df_{A p_0} = \begin{bmatrix} \lambda_u & 0 \\ 0 & e^t \lambda_s \end{bmatrix}.$$

e portanto p_0 é um ponto sela.

Observe que $\text{supp}(\phi^t - id) \subseteq U$. De fato, se $(u_1, u_2) \notin B(p_0, r_0)$, então $\delta(|(u_1, u_2)|) = 0$ e portanto (7.2) toma a forma

$$\begin{aligned}\dot{u}_1 &= 0 \\ \dot{u}_2 &= 0\end{aligned}$$

logo $\phi^t(u_1, u_2) = (u_1, u_2)$. Isto diz que $f = f_A$ fora de U .

Devido que $W^s(p) = W^s(p, f_A)$ são linhas verticais (nas coordenadas (u_1, u_2)) e o fluxo ϕ^t deixa fixo à primeira coordenada, tem-se que ϕ^t preserva $W^s(p, f_A)$ para todo $p \in \mathbb{T}^2$. Portanto, f preserva cada $W^s(p)$ (veja também (7.1)).

É fácil ver que p_0 é ponto fixo para f . Ainda, fora de U , f não tem pontos fixos. A restrição de f a $W(p_0, f)$

7.5. Propriedades do DA-difeomorfismo. Sejam V o aberto definido acima e ponha $N = \mathbb{T}^2 \setminus V$. O conjunto N assim definido é uma região “trapping”. De fato, $V \subseteq f(V)$ e então $f(V)^c \subseteq V^c$. Logo,

$$f(N) = f(\mathbb{T}^2 \setminus V) = f(\mathbb{T}^2 \cap V^c) \subseteq f(\mathbb{T}^2) \cap f(V^c) \subseteq \mathbb{T}^2 \cap V^c = N.$$

Agora como N é compacto, f é contínua e os $f^j(N)$ são conjuntos encaixados, temos que o conjunto

$$\Lambda = \bigcap_{j=0}^{\infty} f^j(N)$$

é não vazio e compacto. Temos ainda que

Teorema 65. *O difeomorfismo derivado de Anosov tem estrutura hiperbólica em Λ .*

Prova: Em U ,

$$Df_q = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Fora de U ,

$$Df_q = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Pela escolha de V , temos que $a_{11} = \lambda_u > 1$ e $0 < a_{22} < 1$ fora de $f(V)$, logo sobre Λ . De fato, de $q \in \Lambda$, então $q \notin \cup f^j(V)$, portanto $q \notin f^j(V)$ para qualquer $j \geq 1$. Em particular, $q \notin f(V)$. Assim, se cumpre também para $q \in \Lambda$

$$Df_q = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad 0 < a_{22} < 1, \quad a_{11} > 1.$$

Pela forma da derivada, $Df_q(0, u_1) = (0, a_{22}u_1)$, temos que $E_q^s(f) = E_q^s(g)$.

Como $|Df_q(0, u_1)| \leq a_{22}|(0, u_1)|$, onde $a_{22} < 1$, $E_q^s(q)$ é contrativa.

Observando que Λ é compacto, existe $C > 0$ tal que $|a_{21}| < C$ para todo $q \in \Lambda$, então define-se $L = \frac{C}{\lambda_u - \lambda_s}$ e seja

$$C_q^u = \{(v_1, v_2) \in E_q^u(g) \oplus E_q^s(g) : |v_2| \leq L|v_1|\}.$$

Afirmamos que C_q^u é f -invariante. De fato, seja $(v_1, v_2) \in C_q^u$, então

$$Df_q(v_1, v_2) = \begin{bmatrix} a_{11}v_1 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 |v'_2| &= |a_{21}v_1 + a_{22}v_2| \\
 &\leq a_{21}|v_1| + a_{22}|v_2| \\
 &\leq C|v_1| + a_{22}L|v_1| \\
 &= |v_1|(C + a_{22}L) \\
 &= C \left(1 + \frac{\lambda_s}{\lambda_u - \lambda_s}\right) |v_1| \\
 &= C \frac{\lambda_u}{\lambda_u - \lambda_s} \\
 &\leq a_{11}L|v_1| \\
 &= L|v'_1|.
 \end{aligned}$$

Portanto, $Df_q(C_q^u) \subseteq C_{f(q)}^u$.

Seja

$$E_q^u(f) = \bigcup_{j=0}^{\infty} Df_{f^{-j}(q)}^j C_{f^{-j}(q)}^u.$$

Como C_q^u é invariante, temos que

$$\bigcap_{j=0}^k Df_{f^{-j}(q)}^j C_{f^{-j}(q)}^u = Df_{f^{-k}(q)}^k C_{f^{-k}(q)}^u.$$

Assim, $E_q^u(f)$ é invariante.

Sejam $(v_1, v_2), (w_1, w_2) \in C_{f^{-k}(q)}^u$. Como

$$Df_{\tilde{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

temos que:

$$\begin{bmatrix} v_1^k \\ v_2^k \end{bmatrix} = Df_{f^{-k}(q)}^k \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} w_1^k \\ w_2^k \end{bmatrix} = Df_{f^{-k}(q)}^k \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left| \frac{v_2^1}{v_1^1} - \frac{w_2'}{w_1^2} \right| &= \left| \frac{a_{21}v_1 + a_{22}v_2}{a_{11}v_1} - \frac{a_{21}w_1 + a_{22}w_2}{a_{11}w_1} \right| \\ &= \frac{a_{22}}{a_{11}} \left| \frac{v_2}{v_1} - \frac{w_2}{w_1} \right|, \quad \text{onde} \quad \left(\frac{a_{22}}{a_{11}} \right) < 1. \end{aligned}$$

Então, por indução:

$$\left| \frac{v_2^k}{v_1^k} - \frac{w_2^k}{w_1^k} \right| = \left(\frac{a_{22}}{a_{11}} \right)^k \left| \frac{v_2}{v_1} - \frac{w_2}{w_1} \right|.$$

Cuando k tende para infinito, temos que $\left(\frac{a_{22}}{a_{11}} \right)^k \rightarrow 0$. Então o cono converge a uma linha. Assim, temos que E_q^u é uma linha no espaço tangente. Ainda, $Df_q|_{E_q^u}$ é uma expansão, pois

$$\left| Df_q \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} a_{11}v_1 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 \end{bmatrix} \right| = a_{11}|v_1| \quad \text{onde} \quad a_{11} > 1.$$

Observa-se agora que

$$\mathbb{T}^2 \setminus \Lambda = \mathbb{T}^2 \cap \Lambda^c = \mathbb{T}^2 \cap \left(\bigcap_{j=0}^{\infty} f^j(N) \right)^c = \mathbb{T}^2 \cap \left(\bigcup_{j=0}^{\infty} f^j(N^c) \right) = \mathbb{T}^2 \cup \bigcup_{j=0}^{\infty} f^j(V) = \bigcup_{j=0}^{\infty} f^j(V).$$

e, como p_1, p_2 são pontos fixos, eles não pertencem a $\bigcup_{j=0}^{\infty} f^j(V)$. Portanto, $p_1, p_2 \in \Lambda$. Pelo teorema 6.2 em [3], temos que

$$W^u(p_i, f) \subseteq \Lambda, \quad i = 1, 2. \quad (7.3)$$

Lema 66. *As variedades estáveis de f satisfazem o seguinte:*

- i) $W^s(q, f) = W^s(q, g)$ para $q \notin W^s(p_0, g)$.
- ii) $W^s(p_1, f) \cup W^s(p_2, f) = W^s(p_0, g) \setminus \{p_0\}$.
- iii) $W^s(q, f)$ é denso em $\mathbb{T}^2$ para todo $q \in \Lambda$.

Demonstração. i) Sabemos que f preserva as variedades estáveis de g , portanto

$$f(W^s(q, g)) = W^s(f(q), g) \quad \text{e} \quad W^s(q, g) \text{ é tangente a } \mathbb{E}^s(f).$$

Para $q \in \Lambda$, f é uma contração em $W_{loc}^s(q, g)$, portanto

$$W_{loc}^s(q, f) = W_{loc}^s(q, g) \quad \text{e} \quad W^s(q, f) \subseteq W^s(q, g).$$

Recíprocamente, seja I uma componente conexa em $W^s(p, g)$ que não intersecta a V , como $I \subseteq W^s(q, g)$, f^{-1} expande em $W^s(q, g)$. Portanto, para algum j suficientemente

grande $f^{-j}(I) \cap V \neq \emptyset$, logo $f^{-j}(I) \subseteq W_{loc}^s(p_0, g)$. Portanto, se $q \notin W^s(p_0, g)$ temos que

$$W^s(q, f) = W^s(q, g).$$

Em particular,

ii) $W^s(p_1, f) \cup W^s(p_2, f) = W^s(p_0, g) \setminus \{p_0\}$.

iii) Segue-se de que $W^s(q, f)$ tem declive irracional (veja teorema 1.1). $\square$

Lema 67. *A variedade inestável de f em p_0 , $W^u(p_0, f)$, é um conjunto aberto e denso em $\mathbb{T}^2$.*

Demonstração. Dado que $W^u(p_0, f) = \bigcup_{j=0}^{\infty} f^j(V)$ e V é aberto, tem-se que $W^u(p_0, f)$ é também aberto. Para provar que $W^u(p_0, f)$ é denso em $\mathbb{T}^2$ resta provar que $q \in \Lambda$ é ponto de acumulação de $W^u(p_0, f)$. Sejam $q \in \Lambda$ e B_q uma vizinhança de q em $\mathbb{T}^2$. Ponhamos $I = \text{comp}_q(W^s(q, f) \cap B_q)$ f^{-1} expande em $W^s(q, f)$ portanto, para j suficientemente grande,

$$\emptyset \neq f^{-j}(I) \cap f(V) \subseteq f^{-j}(B_q) \cap f(V).$$

Aplicando f^j ao ultimo conjunto, temos que

$$\emptyset \neq B_q \cap f^{j+1} \subseteq B_q \cap W^u(p_0, f)$$

o que prova o teorema. $\square$

Lema 68. *As variedades inestáveis $W^u(p_1, f)$ e $W^u(p_2, f)$ são densas em Λ .*

Demonstração. Seja $p \in \Lambda \cap W^s(q, g)$ onde q é um ponto periódico para g de período k (veja teorema 1.2). Como $\Lambda = \mathbb{T}^2$ e $W^u(p_0, f)$ é denso, temos que $p \in \overline{W^u(p_0, f)} \setminus W^u(p_0, f)$, ou seja, $p \in \partial W^u(p_0, f)$.

Seja Z_p uma vizinhança de p e $I = \text{comp}_p(W^s(p, f) \cap Z_p)$. Então, $f^{-jk}(I)$ intersecta a V para j suficientemente grande- Logo,

$$f^{-jk}(I) \cap [W^u(p_1, f) \cup W^u(p_2, f)] \neq \emptyset.$$

Portanto,

$$[W^u(p_1, f) \cup W^u(p_2, f)] \cap Z_p \neq \emptyset \quad (\text{por (7.2)}).$$

Isto prova que

$$\overline{W^u(p_1, f) \cup W^u(p_2, f)} = \Lambda.$$

Pelo lema 4.2, $W^s(p_1, f)$ é denso em $\mathbb{T}^2$, logo

$$W^s(p_1, f) \cap W^u(p_2, f) \neq \emptyset. \quad (\text{os espaços } \mathbb{E}^u \text{ e } \mathbb{E}^s \text{ são transversos})$$

Pelo lemma de inclinação

$$W^u(p_1, f) \subseteq \overline{W^s(p_2, f)}.$$

Análogamente,

$$W^u(p_2, f) \subseteq \overline{W^s(p_1, f)}.$$

Portanto,

$$\overline{W^u(p_1, f)} = \overline{W^s(p_2, f)}.$$

Assim,

$$\overline{W^u(p_1, f)} = \overline{W^u(p_2, f)} = \overline{W^u(p_1, f) \cup W^u(p_2, f)} = \overline{W^u(p_1, f) \cup W^u(p_2, f)} = \Lambda.$$

□

Teorema 69. *A dimensão topológica de Λ é um.*

Prova: Por lema 4.3 $W^u(p_0, f)$ é densa em $\mathcal{T}^2$, logo Λ tem interior vazio, logo

$$\dim_T(\Lambda) \leq 1 < 2.$$

Por outro lado, as variedades $W^u(p_j, f) \subseteq \Lambda$ (por (7.3)). Portanto,

$$1 \leq \dim_T(W^u(p_j, f)) \leq \dim_T(\Lambda) \leq 1.$$

Lema 70. *Para $j = 1, 2$, $\{q \in \Lambda : q \text{ é um ponto homoclínico transversal para } p_j\}$ é denso em Λ .*

Demonstração. Seja $x \in \Lambda$, pelos lemas 4.2 e 4.4 $W^u(p_j, f)$ e $W^s(p_j, f)$ são densos em Λ , portanto existe $q \in Z_x$ (vizinhança de x) tal que $q \in W^u(p_j, f) \cap W^s(p_j, f)$. Como Λ é hiperbólico, podemos considerar q transverso, logo os pontos homoclinicos transversos são densos. □

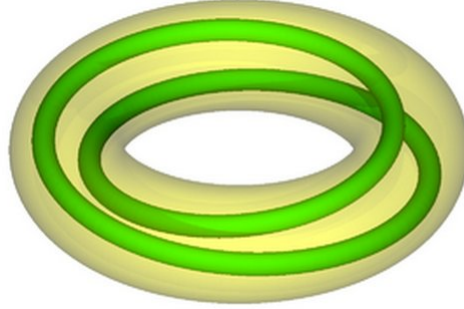
Teorema 71. *O conjunto Λ é transitivo.*

Demonstração. Seja U um aberto em Λ , pelo lema acima, existe $q \in U$ ponto homoclinico transversal, seja então o disco D tal que $q \in D \subseteq U \cap W^s(p, f)$, pelo (argumento tipo) lemma $\cup f^n(D) = W^u(p_j, f)$ que é denso, agora pelo teorema de transitividade de Birkhoff, prova-se o teorema. □

Teorema 72. *Os pontos periódicos são densos em Λ .*

Demonstração. Segue-se diretamente do lema 4.6 e do teorema 4.5[?] parte a)(horseshoe). □

8. O SOLENOIDE



$$D^2 = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}, \quad S^1 = \{t \in \mathbb{R} \bmod 1\}.$$

$$N = S^1 \times D^2$$

$$D(t) = \{t\} \times D^2$$

Teorema $\Lambda = \bigcap f^k(N)$ é um atrator hiperbólico, expansor, de dimensão topológica 1.

$$\begin{aligned} f : N &\rightarrow N \\ (t, z) &\rightarrow (g(t), \tfrac{1}{4}z + \tfrac{1}{2}e^{2\pi ti}) \end{aligned}$$

Observação 73. $f(D(t)) \subset D(2t)$ e é uma contração com fator $\frac{1}{4}$ em cada fibra.

Proposição 74. Para cada t_0 fixo, $\Lambda \cap D(t_0)$ é Cantor.

Demonstração. Se $f(t, z) \in D(t_0)$ então $g(t) = t_0 \bmod 1$, so $t = \frac{t_0}{2}$ ou $\frac{t_0}{2} + \frac{1}{2}$.

Note que

$$\begin{aligned} f(D(\tfrac{t_0}{2})) &= (t_0, \tfrac{1}{4}D^2 + \{\tfrac{1}{2}e^{\pi t_0 i}\}), \\ f(D(\tfrac{t_0+1}{2})) &= (t_0, \tfrac{1}{4}D^2 - \{\tfrac{1}{2}e^{2\pi t_0 i}\}), \end{aligned}$$

pois $e^{\pi t_0 i + \pi i} = -e^{\pi t_0 i}$.

Então, as duas imagens estão na mesma fibra mas são reflexões uma da outra em relação a origem da fibra $D(t_0)$.

São disjuntas porque $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} > 0$.

Ambas as imagens estão em $D(t_0)$ porque $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} < 1$ e portanto $f(N) \subset N$.

Seja

$$N_k \equiv \bigcap_{j=0}^k f^j(N) = f^k(N).$$

Afirmção Para todo $t \in S^1$, $N_k \cap D(t)$ é a união de 2^k discos de raio $(\frac{1}{4})^k$.

Prova. Para $k = 0$, é claro que cumpre-se.

Para cada $k = 1$, segue do que fizemos acima.

$$N_k \cap D(t) = f(N_{k-1} \cap D(t/2)) \cup f(N_{k-1} \cap D(t/2 + 1/2)).$$

Por indução, $N_{k-1} \cap D(t/2)$ e $N_{k-1} \cap D(t/2 + 1/2)$, são cada um, união de 2^{k-1} discos de raio $(\frac{1}{4})^{k-1}$.

Segue do fato que f é contração nas fibras por fator $1/4$ que

$$f(N_{k-1} \cap D(t/2)) \text{ e } f(N_{k-1} \cap D(t/2 + 1/2))$$

são, cada um, união de 2^{k-1} discos de raio $(\frac{1}{4})^k$. Juntos, são união de 2^k discos de raio $(\frac{1}{4})^k$.

Agora,

$$\Lambda = \bigcap_{j=0}^{\infty} f^j(N) = \bigcap_{j=0}^{\infty} N_j \Rightarrow \Lambda \cap D(t_0)$$

é um Cantor. □

8.1. Propriedades topológicas do Solenoide Λ .

Proposição 75. Λ tem as seguintes propriedades:

- (a): Λ é conexo.
- (b): Λ não é local/e conexo.
- (c): Λ não é conexo por caminho.
- (d): Dimensão topológica de Λ é 1.

Demonstração. Prova de (a) Seque do fato que N_k são compactos, conexos e encaixados e portanto sua intersecção Λ é conexa.

Prova de (b) Para $0 < t_2 - t_1 < 1$, $D[t_1, t_2] \cap N_k$ é a união de 2^k tubos "twisted". Para cada vizinhança U de um ponto $p \in \Lambda$, tem uma escolha de t_1 e t_2 e k grande, tal que U contains dois destes tubos. Como cada tubo contains algum ponto de Λ , isto mostra que Λ não é local/e conexo.

Prova de (c) Fixa $p = (t_0, z_0) \in \Lambda$. Por indução, para $k \geq 1$, $\exists q_k \in \Lambda \cap D(t_0)$ tal que:

- (i): Para $k \geq 2$, q_k está na mesma componente de $N_{k-1} \cap D(t_0)$ que q_{k-1} e
- (ii): Para todo caminho de p a q_k em N_k deve se enrolar em S^1 pelo menos 2^{k-1} vezes. (Isto especificamente componente de $N_k \cap D(t_0)$ a qual q_k pertence).

Por construção, a sequência $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ é Cauchy. Seja $q = \lim q_k \in \Lambda$ porque Λ é fechado.

Afirmção 8. *Não existe caminho contínuo em Λ de p a q .*

Prova do Claim Note que q pertence a mesma componente de $N_k \cap D(t_0)$ que q_k . Para todo caminho de p a q em N_k deve intersectar $D(t_0)$ pelo menos 2^{k-1} vezes, indo em torno de S^1 entre cada destas intersecção. Entao, se existe caminho contínuo em Λ de p a q , teria que intersectar $D(t_0)$ infinitas vezes (pelo menos 2^{k-1} para k arbitrariamente grande) Mas isto é absurdo porque o caminho contínuo não pode ir em torno de S^1 as vezes, o que prova o Claim.

Prova de (d) Em cada fibra $\Lambda \cap D(t_0)$ é total/c desconexo e tem dimensão topologica zero. Num segmento de N , $\Lambda \cap D([t_1, t_2])$ é homeomorfico ao produto de $\Lambda \cap D(t_1) \cap D([t_1, t_2])$ e então tem dimensão topológica 1. □

Proposição 76. *f/Λ tem as propriedades:*

- (a): *periódicos são densos em Λ .*
- (b): *f é topological transitiva.*
- (c): *f tem estrutura hiperbólica.*

Lema 77. *Os pontos periodicos de g são densos em S^1 , pois g é conjugada ao shift 2-simbolos.*

Demonstração. (da proposição).

- (a): Note que $g^k(t_0) = t_0$, $f^k(D(t_0)) \subset D(t_0)$ e $D(t_0)$ disco, $f^k/D(t_0)$ contração implica que f^k tem ponto fixo em $D(t_0)$. Pelo Lema, segue que as fibras com ponto periodico para f são densas no conjunto das fibras.

Afirmção. Os periódicos são de fato densos em Λ .

Prova. Tome $p \in \Lambda$ e vizinhança U de p . Existe uma escolha de k , t_1 e t_2 tal que o tubo $f^k(D([t_1, t_2])) \subset U$. Mostramos antes que f tem ponto periódico em $f^k(D([t_1, t_2])) \subset U$. Isto prova a primeira parte da Proposição.

- (b): Precisamos verificar em Λ a hipótese de Birkhof transitividade.

Sejam então U e V dois abertos de Λ . Então $\exists$ abertos U' , V' em $S^1 \times D^2$ tais que $U' \cap \Lambda = U$ e $V' \cap \Lambda = V$. Existe $k \in \mathbb{N}$, $0 < t_2 - t_1 < 1$ e $0 < t'_2 - t'_1 < 1$ tal que $f^k(D([t_1, t_2])) \subset U'$ e $f^k(D([t'_1, t'_2])) \subset V'$. Então $\exists j > 0$ tal que $f^j(D([t_1, t_2]) \cap D([t'_1, t'_2])) \neq \emptyset$. De fato, como podemos tomar j tal que $f^j(D([t_1, t_2]))$ cruza

$D([t'_1, t'_2])$, podemos de fato ter

$$f^j(D[t_1, t_2] \cap \Lambda) \cap D([t'_1, t'_2]) \cap \Lambda \neq \emptyset.$$

Então

$$f^j(f^k(D[t_1, t_2] \cap \Lambda)) \cap f^k D([t'_1, t'_2]) \cap \Lambda \neq \emptyset$$

e $f^j(U) \cap V = f^j(U' \cap \Lambda) \cap [V' \cap \Lambda] \neq \emptyset$ daí segue o transitivo.

□

8.2. O solenoide é o limite inverso. Sejam

$$S^1 = \{t \in \mathbb{R} \bmod 1\},$$

$$g : S^1 \leftarrow S^1, g(t) = 2t \bmod 1,$$

$$\Sigma = \{s \in (S^1)^\mathbb{N}, g(s_{j+1}) = s_j\}.$$

- Definimos $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ por

$$\sigma(s) = t \quad \text{se} \quad t_j = \begin{cases} s_{j-1} & \text{se } j \geq 1 \\ g(s_0) & \text{se } j = 0, \end{cases}$$

isto significa que se

$$s = (s_0, s_1, \dots) \in \Sigma, \quad g(s_{j+1}) = s_j$$

então

$$\sigma(s) = (g(s_0), s_0, s_1, s_2, \dots).$$

- (Σ, σ) é chamado limite inverso de g .
- Definimos $h : \Lambda \rightarrow (S^1)^\mathbb{N}$ por $h(p) = S$ onde $f^{-j}(p) \in D(s_j)$ com $s_j \in S^1$ para $j = 0, 1, \dots$

Teorema 78. A função h é uma conjugação de (Λ, f) a (Σ, σ) .

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{f} & \Lambda \\ \downarrow h & \hookrightarrow & \downarrow h \\ \Sigma & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma \end{array}$$

$$h \circ f = \sigma \circ h.$$

Demonstração. Passo 1. $h(\Lambda) \subset \Sigma$.

Seja $h(p) = s$ então

$$f^{-j}(p) \in D(s_j) \text{ e } f^{-(j+1)}(p) \in D(s_{j+1}) \text{ (por definição)}$$

então,

$$f^{-j}(p) \in D(s_{j+1}) \Rightarrow f^{-j}(p) \in f(D(s_{j+1}^{j+1})) \cap D(s_j) \Rightarrow D(s_j) \cap f(D(s_{j+1}^{j+1})) \neq \emptyset$$

e como pela definição de solenoide, $D(s_j)$ e $D(s_{j+1})$ ou são disjuntos ou um está contido no outro, concluímos

$$f(D(s_{j+1})) \subset D(s_j).$$

Assim,

$$g(s_{j+1}) = s_j, \quad \forall j \Rightarrow s \in \Sigma.$$

Passo 2.

$$h \circ f = \sigma \circ h$$

Seja $p \in \Lambda$, $h(p) = s$ e $h(f(p)) = t$.

Como $h(p) = s \Rightarrow f^{-(j+1)}(f(p)) = f^{-j}(p) \in D(s_j), \forall j \geq 0$

Como $h(f(p)) = t \Rightarrow f^{-j}(p) = f^{-(j+1)}(f(p)) \in D(t_{j+1}), \forall j \geq 0$

então,

$$\begin{aligned} f^{-j}(p) &\in D(s_j) \cap D(t_{j+1}) \\ f^{-j}(p) &= (s_j, \dots) = (t_{j+1}, \dots) \Rightarrow s_j = t_{j+1}, \forall j \geq 0. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Também

$$\begin{aligned} f(p) &= f^{-0}(f(p)) \in D(t_0) \\ f^{-0}(p) &\in D(s_0) \Rightarrow f(p) \in f(D(s_0)) \end{aligned}$$

logo

$$f(p) \in D(t_0) \cap f(D(s_0)) \Rightarrow t_0 = g(s_0). \tag{8.2}$$

Sejam

$$\begin{aligned} h \circ f(p) &= t = (t_0, t_1, t_2, \dots) \\ \sigma \circ h(p) &= \sigma(s) = (g(s_0), s_0, s_1, s_2, \dots). \end{aligned}$$

Por 8.1 e 8.2,

$$t_0 = g(s_0), t_{j+1} = s_j, j \geq 0 \Rightarrow h \circ f(p) = \sigma \circ f.$$

Passo 3.

h é $1-1$.

Se $h(p) = h(q) \Rightarrow f^{-j}(p), f^{-j}(q) \in D(s_j), \forall j \geq 0$, então

$$p, q \in f^j(D(s_j)) \forall j \geq 0$$

$$p, q \in \bigcap_{j=0}^k f^j(D(s_j)) = B_k.$$

Como $s \in \Sigma$ então

$$g(s_{j+1}) = s_j \Rightarrow f(D(s_{j+1})) \subset D(s_j)$$

$$f^j(D(s_j)) \subset f^{j+1}(D(s_{j-1})) \cdots f^2(D(s_2)) \subset f(D(s_1)) \subset D(s_0),$$

então

$$p, q \in \bigcap_{j=0}^k f^j(D(s_j)) = f^k(D(s_k)) = B_k,$$

onde B_k é uma de bolas encaixadas com raio tendendo a zero, isto implica que $p = q$.

Portanto h é $1-1$.

Passo 4.

h é sobrejetiva.

Seja $s \in \Sigma$, então $g(s_{j+1}) = s_j$, assim

$$f(D(s_{j+1})) \subset D(s_j).$$

Como antes obtemos

$$\bigcap_{j=0}^k f^j(D(s_j)) = B_k, \quad B_{k+1} \subset B_k, \quad \text{compacto}$$

$$\bigcap_{j=0}^{\infty} B_k \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{j=0}^{\infty} B_k = \bigcap_{j=0}^{\infty} f^j(D(s_j)) \neq \emptyset$$

então existe $p \in \bigcap_{j=0}^{\infty} f^j(D(s_j))$ logo $p \in f^j(D(s_j)), \forall j \geq 0$, então $h(p) = s$, por definição.

Pela definição de h temos que h é continua e Λ é compacto, então h é homeomorfismo e o teorema está provado. $\square$

9. O ATRATOR DE LORENZ

O Lorenz construiu um modelo matemático para a movimentação das massas de ar na atmosfera. As equações de Lorenz são:

$$(*) \begin{cases} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= x - bz \end{cases}$$

onde $\{\sigma, r, b\} \subset \mathbb{R}^+$ com

σ : número de Prandtl

r : número de Rayleigh

b : razão entre a comprimento e altura do sistema.

Para $r = 28$, $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$, (parâmetros de Lorenz) exhibe um comportamento caótico.

Propriedades básicas da equação de Lorenz

Simetria: Se $(x(t), y(t), z(t))$ é solução de $(*)$ então $(-x(t), -y(t), -z(t))$ é também solução de $(*)$.

O eixo z: O eixo z ($x = 0, y = 0$) é invariante, isto é, $x_t(0, 0, z)$ permanece no eixo z , onde $x_t(0, 0, z) = \text{cte} \cdot e^{-bt}$. Se $t \rightarrow 0$ então $x_t \rightarrow (0, 0, 0)$.

Contração do volume: Seja $V(t) = \text{vol}(X_t(U))$ logo $V(t + dt) = V(t) + \int_S (X \cdot \eta dt) dS$.

$$\dot{V}(t) = \int_S X \cdot \eta dS = \int_V \nabla X dV,$$

como $\nabla X = -(\sigma + 1 + b)$, então $\dot{V}(t) = -(\sigma + 1 + b)V$, assim $V(t) = V(0)e^{-(\sigma+1+b)t}$.

Elipsoide é um bloco isolante: Consideremos $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$L(x, y, z) = rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2,$$

e $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$ solução de $(*)$.

Seja $\psi = L \circ \varphi$ temos que

$$\psi'(t) = 2\sigma(rx^2(t) + y^2(t) + bz^2(t) - 2rbz(t)) < 0$$

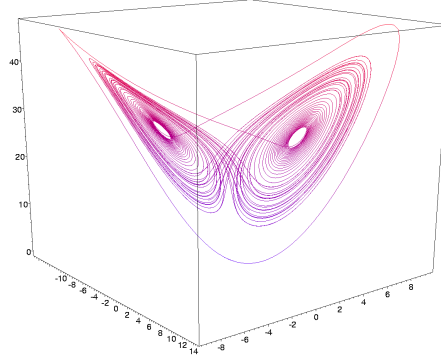


FIGURA 2. Lorenz attractor

para valores grandes de z .

Como L é uma função Lyapunov, então o fluxo para valores grandes de c el elipsoide é transversal ao fluxo pra o seu interior, assim:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : L(x, y, z) < c\}$$

é um bloco aislante para o conjunto $\Lambda = \cap_{t>0} X_t(U)$.

Logo, para cada $t > 0$, temos

$$\text{vol}\Lambda < \text{vol}X_t(U)$$

e pelo anterior, $\text{vol}\Lambda = 0$.

Pontos de Equilíbrio: O ponto $(0, 0, 0)$ é um ponto de equilíbrio, para todos os parâmetros é uma singularidad hiperbólica e pelo Teorema de Hartman-Grobman lineariza-se a

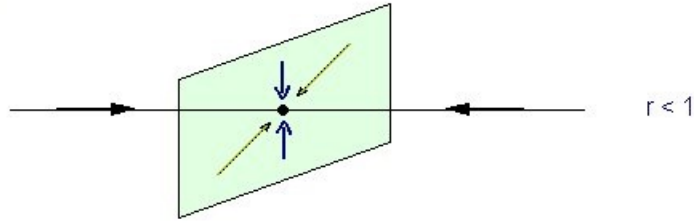
$$\begin{cases} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y \\ \dot{z} &= -bz, \end{cases}$$

onde $z(t) = ke^{-bt}$ representa um decaimento a zero quando $t \rightarrow \infty$.

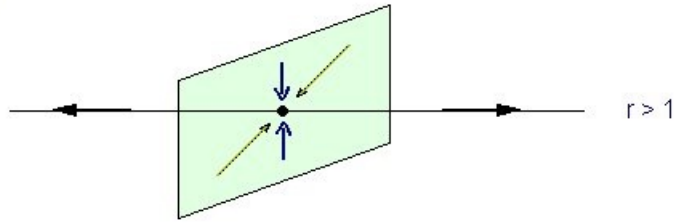
Para as outras direções, analisamos

$$\begin{cases} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y \\ \dot{z} &= -bz \end{cases}$$

Se $r < 1$ é estável e globalmente attracting $\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-(\sigma+1) \pm \sqrt{(\sigma+1)^2 - 4\sigma(1+r)}}{2}$, $\lambda_3 = -b$.



Se $r > 1$ é um ponto de sela.



Para $r > 1$ existem outros 2 pontos fixos que são:

$$C_1 = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$$

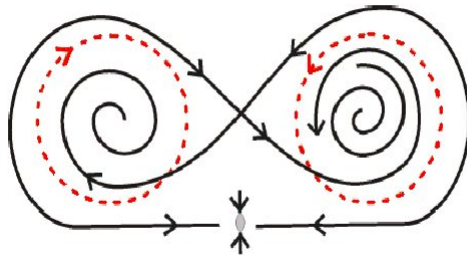
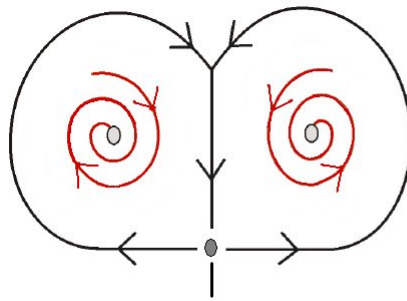
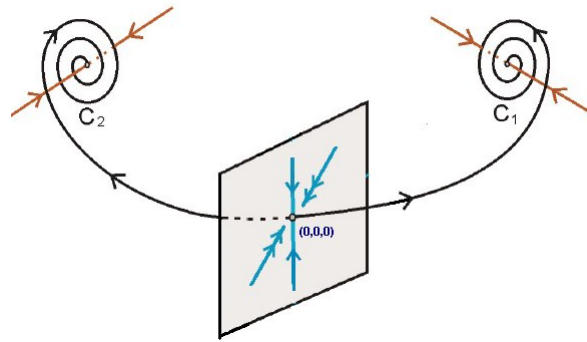
$$C_2 = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1).$$

O s valores próprios do fluxo linearizado em C_1 e C_2 são as raízes de $a^3 + a^2(v + b + 1) + ab(\sigma + r) + 2\sigma b(r - 1)$ quando $r \rightarrow 1$, as três raízes tem valor real. Quando $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}$. Tem-se uma raiz real e um par de raízes complexos se $r > 1,346$.

Se r cresce mais as espinales fazem-se angostas de modo que toca a variedade estável da origem assim tem-se um ponto homoclínico (órbita que nasce e morre na origem).

Seja $r_H = 24,74$. Quando $r > r_H$ as raízes complexas da equação tem parte real positiva e C_1, C_2 são não estáveis.

Se aumenta r , cada variedade inestável da origem é atraída ao ponto de equilíbrio oposto.



Conclusão:

- | | |
|-----------------|--|
| $0 < r < 1$ | A origem é globalmente estável. |
| $r > 1$ | A origem é não estável. |
| $1 < r < 24,74$ | C_1 e C_2 são estáveis, todos los autovalores tem parte real negativa. |
| $24,74 < r$ | C_1 e C_2 são não estáveis, tem um autovalor negativo e C_1 e C_2 tem autovalores com parte real positiva. |

Análises geométricas perto da singularidade

Para

$$\begin{cases} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= -bz + xy, \end{cases}$$

onde $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}, r = 28$.

$DX(0, 0, 0)$ tem os autovalores:

$$\lambda_1 = -\frac{11}{2} + \frac{\sqrt{1201}}{2} \approx 11,83$$

$$\lambda_2 = -\frac{11}{2} - \frac{\sqrt{1201}}{2} \approx -22,83$$

$$\lambda_3 = -\frac{8}{3} \approx -2,67.$$

Assim, por Hartman Grobman é equivalente a resolver $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (\lambda_1 x, \lambda_2 y, \lambda_3 z)$ onde $X^t(x_0, y_0, z_0) = (x_0 e^{\lambda_1 t}, y_0 e^{\lambda_2 t}, z_0 e^{\lambda_3 t})$.

Consideremos

$$S = \{(x, y, 1) : |x| \leq 1/2, |y| \leq 1/2\}, S^{-1} = \{(x, y, 1) \in S : x < 0\}$$

$$S^+ = \{(x, y, 1) \in S : x > 0\}, S^* = S^- \cup S^+ = S/\Gamma$$

onde $\Gamma = \{(x, y, 1) \in S : x = 0\}$.

Vamos assumir que S é uma seção transversal ao fluxo tal que toda trajetória cruza S .

Consideremos

$$\Sigma = \{(x, y, z) : |x| = y\} = \Sigma^- \cup \Sigma^+$$

onde $\Sigma^\pm = \{(x, y, z) : x = \pm 1\}$.

Para $(x_0, y_0, 1) \in S^*$, seja τ tal que $X^\tau(x_0, y_0, 1) \in \Sigma$ é dado por $\tau(x_0) = \frac{-1}{\lambda_1} \log(x_0)$ desde que $(x_0, y_0, 1) \in S^*$ onde $x_0 \neq 0$ então $\text{sgn}(x_0) = \frac{x_0}{|x_0|}$, logo

$$X^\tau(x_0, y_0, 1) = (\text{sgn}(x_0), y_0 |x_0|^{-\lambda_2/\lambda_1}, |x_0|^{-\lambda_3/\lambda_1})$$

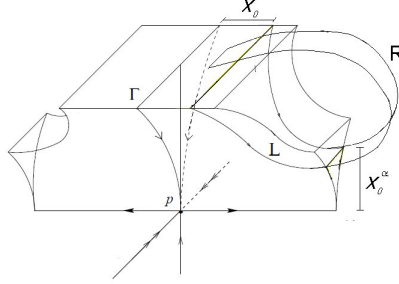
Como $0 < -\lambda_3 < \lambda_1 < -\lambda_2$ então $0 < \alpha = -\lambda_3/\lambda_1 < 1 < \beta = -\lambda_2/\lambda_3$.

Seja $L : S^* \rightarrow \Sigma$ dada por $L(x, y) = (y|x|^\beta, |x|^\alpha)$ tal que

$$x > 0 \Rightarrow L(x, y) \in \Sigma^+$$

$$x < 0 \Rightarrow L(x, y) \in \Sigma^-$$

- $|L(x_0, y) - L(x_0, \tilde{y})| = |x_0|^\beta |y - \tilde{y}| < |(x_0, y) - (x_0, \tilde{y})|$ (a distância da imagem é menor)
- $L(x, y_0) = (y_0|x|^\beta_b, |x|^\alpha_c)$ então $c = b^{\alpha/\beta} y_0^{-\alpha/\beta}$ onde $\alpha/\beta < 1$
- $x \rightarrow 1$ então $L(x, y) \rightarrow (0, 0)$.



Assim, $L(S^\pm)$ é um triângulo com vértice $(\pm 1, 0, 0)$. Dai tomamos R tal que leva $\Sigma^\pm$ a S . Defina-se a função de retorno $P : S^* \rightarrow S$ tal que $P = R \circ L$, $P(p) = X_T(p)$ onde T é o primeiro tempo positivo tal que $X_T(p) \in S$ e

$$DR(y, z) = \begin{pmatrix} 0 & M \\ \pm\sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad 0 < \sigma < 1, \quad M > 1.$$

$$DP = DR \cdot DL = \begin{pmatrix} 0 & M \\ \pm\sigma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y\beta x^{\beta-1} & x^\beta \\ \alpha x^{\alpha-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{f}(x) & 0 \\ \tilde{g}(x, y) & \tilde{h}(x) \end{pmatrix}$$

Assim, $P = (f(x), g(x, y))$.

Se γ é foliação dado por $S \cap \{x = x_0\}$ então $P(\gamma)$ está contido em alguma foliação $S \cap \{x = x_i\}$.

$P = (f(x), g(x, y))$ para alguma função $f : I \setminus \{0\} \rightarrow I$, $g : I \setminus \{0\} \rightarrow I$, onde $I = [-1/2, 1/2]$.

Vemos descrever algumas propriedades de f .

(1) Temos

$$\begin{aligned} X(x, y, z) = -X(-x, -y, -z) &\Rightarrow X_T(x, y, 1) = -X_T(-x, -y, -1) \\ &\Rightarrow (f(x), g(x, y), 1) = (-f(-x), g(-x, -y), 1) \\ &\Rightarrow f(x) = -f(-x). \end{aligned}$$

(2) f é descontínua em 0, já que $f(0^+) = -1/2$, $f(0^-) = 1/2$.

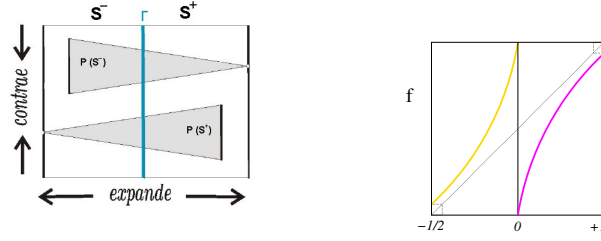


FIGURA 3. A aplicação 1-dimensional associada ao Lorenz

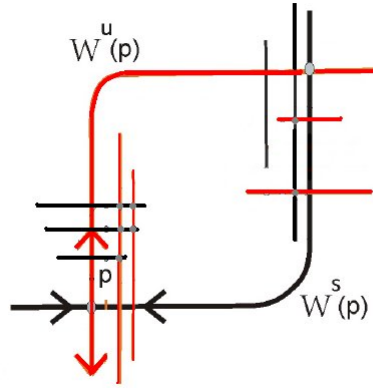
(3) $f' = -M\alpha x^{\alpha-1} \Rightarrow |f'(x)| \rightarrow \infty$, quando $x \rightarrow 0^\pm$.

(4) f é diferenciável sobre $I \setminus \{0\}$ e $f'(x) > \sqrt{2}$.

Conclusão: O atrator $\Lambda = \bigcap_{t>0} X_t(U)$ de Lorenz tem como bloco aislante um bitoro sólido U em $\mathbb{R}^n$ tal que o fluxo X_t é transversal e aponta ao dentro.

Pode-se provar também que Λ é robusto, parcialmente hiperbólico e sensível às condições iniciais.

9.1. O Atrator Geométrico de Lorenz é uma classe Homoclínica. Uma classe homoclínica associada a uma órbita periódica hiperbólica $\mathcal{O} = O_X(p)$ de X denotada por $H_X(p)$, é o fecho da interseção transversal de $W^s(p, X)$ e $W^u(p, X)$.



Seja $I = [-1/2, 1/2]$ espaço das folhas $\mathcal{F}$, I é o espaço cociente de Σ por $\mathcal{F}$ com $\Pi : \Sigma \rightarrow I : (x, y) \rightarrow x$ a aplicação projeção.

Seja $f : I \setminus \{0\} \rightarrow I$ a aplicação induzida por P onde $f \circ \Pi = \Pi \circ P$ onde $f(I \setminus \{0\}) = (-1/2, 1/2)$. Se $V \subset S$ e $J \subset I$ usemos as convecções $P(V) := P(V \setminus \{x = 0\})$,

$f(J) := f(J \setminus \{0\})$ e $\dot{I} = (-1/2, 1/2)$, assim, podemos escrever $f : I \rightarrow I, f : \dot{I} \rightarrow \dot{I}$. Definimos:

$$A = \bigcap_{n \geq 0} P^{-n}(S).$$

Lemas previos.

Lema 79. *A transformação $f : \dot{I} \rightarrow \dot{I}$ é LEO (localmente eventualmente sobre), isto é, todo intervalo J de $\dot{I}$ existe um número inteiro $n \geq 0$ tal que*

$$f^n(J) = (-1/2, 1/2)$$

Demonstração. Denotemos por $\ell(J)$ a longitud do intervalo J e seja $I_0 \subset \dot{I}$ um intervalo aberto.

(1) Se $0 \notin I_0$ então $I_1 = f(I_0)$ como $f'(x) \geq \lambda > \sqrt{2}$, $\forall x \neq 0$, daqui

$$\int_{I_1} d\ell = \int_{I_0} f' d\ell = \int_{I_0} \lambda d\ell \Rightarrow \ell(I_1) \geq \lambda \ell(I_0).$$

Substitua I_0 por I_1 e continue o algoritmo.

(2) Se $0 \in I_0$ elija I_0^+ = maior componente conexa de $I_0 \setminus \{0\}$ então $\ell(I_0^+) \geq (1/2)\ell(I_0)$.

(a) No caso $0 \notin f(I_0^+)$ então $I_1 = f^2(I_0^+)$, $\ell(I_1) \geq \lambda(I_0)$ substitua I_0 por I_1 e continue o procedimento do algoritmo.

Agora, seja $\beta = \min\{\lambda, \lambda^2\} > 1$. Então no qualquer caso 1 ou 2., temos que $\ell(I_1) \geq \beta \ell(I_0)$. Como $(-1/2, 1/2)$ é de comprimento finita, $\exists n \geq 0$ tal que $f^n(I_0) = (-1/2, 1/2)$. $\square$

Lema 80. *Seja $f : \dot{I} \rightarrow \dot{I}$ dado como acima. Então, para todo $x \in \dot{I}$. Tem-se*

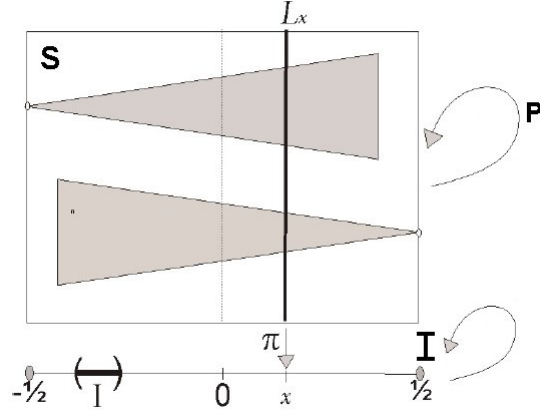
$$I = \overline{\bigcup_{k \geq 0} f^{-k}(\{x\})}.$$

Demonstração. Basta mostrar que $\bigcup_{k \geq 0} f^{-k}(\{x\})$ é denso. Seja $J \subset \dot{I}$ qualquer intervalo pequeno aberto e seja $x \in \dot{I}$. Dado que f é LEO, $\exists, n \geq 0$ tal que $f^n(J) = (-1/2, 1/2)$. Então $x \in f^n(J)$ e assim, ao iterar x ao passado, tendra pre-imagens que caem em J em um tempo determinado $f^{-n}(\{x\}) = \{y \in I : f^n(y) = x\}$ assim,

$$f^{-n}(\{x\}) \cap J \neq \emptyset,$$

portanto,

$$\bigcup_{k \geq 0} f^{-k}(\{x\}) \cap J \neq \emptyset$$



Da figura e do Lema 80 temos que cada folha $L_x = \Pi^{-1}(x)$ com $x \neq \pm 1/2$, temos

$$S = \overline{\bigcup_{k \geq 0} P^{-k}(L_x)}.$$

□

Lema 81. A transformação $f : I \rightarrow I$ tem pontos periódicos densos.

Demonstração. Seja $J \subset \dot{I}$ qualquer intervalo pequeno. Pelo Lema 79, $\exists n$ tal que $f^n(J) \supset J$. Então f^n tem um ponto fixo em J o que implica que existe um ponto periódico de f em J . □

Lema 82. Para todo ponto periódico p de P tem-se $S \subset W^s(p, P)$.

Demonstração. Seja $p = (c, d)$ um ponto periódico de P com $\Pi(p) = c$. Então $c \neq \pm 1/2$, $p \in A$ e a folha $L_c = \{(c, y) : -1/2 \geq y \geq 1/2\} \in \mathcal{F}$, está contenida na variedade estável do ponto p , $W^s(p, P)$, $L_c \subseteq W^s(p, P)$. Pela invariância de $W^s(p, P)$ por P tem-se que

$$P^{-k}(L_c) \subseteq W^s(p, P), \forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \bigcup_{k \geq 0} P^{-k}(L_c) \subseteq W^s(p, P)$$

e como $P^n(J) \subset W^u(p, P)$ então existe $(x', y') \in W^u(p, P) \cap L_x$ com $L_x = L_{\Pi(x', y')} = L_{x'}$.

Agora, mostraremos que $\bigcup_{(x', y') \in W^u(p, P)} L_x \subset S \setminus (L_{-1/2} \cup L_{1/2})$. De fato, temos que

$$A = \overline{\bigcap_{n \geq 0} P^n(S)} \subset \bigcap_{n \geq 0} P^n(S) \subset P^n(S) \subset S,$$

e dado que A é um atrator e p é um ponto periódico hiperbólico tem-se que

$$W^u(p, P) \subseteq A \Rightarrow W^u(p, P) \subseteq A \subset S$$

assim, obtemos o resultado. $\square$

Lema 84. *Para todo ponto periódico p da transformação P tem-se:*

$$\overline{W^u(p, P)} = A$$

Demonstração. Vejamos primeiro que $\overline{W^u(p, P)} \subseteq A$. Para provar, $P^k(p) \notin L_{-1/2} \cup L_{1/2}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, então $O(p) \subset \text{int}(S)$, assim, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$W_\epsilon^u(P^{-k}(p), P) \subset S, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, para qualquer $k \geq 0$

$$W_\epsilon^u(P^{-k}(p), P) = \bigcup_{j \geq 0} P^j(W_\epsilon^u(P^{-j}(P^{-k}(p)), P))$$

$$W^u(p, P) = P^k(W^u(P^{-k}(p), P)) \subset P^k(S),$$

então

$$\overline{W^u(p, P)} \subseteq \overline{\bigcap_{k \geq 0} P^k(S)} = A.$$

Agora, vejamos que $A \subseteq \overline{W^u(p, P)}$, é suficiente provar que $\bigcap_{n \geq 0} P^n(S) \subseteq \overline{W^u(p, P)}$. De fato, seja $(x, y) \in \bigcap_{n \geq 0} P^n(S)$, e dado que P contrai folhas de $\mathcal{F}$ temos, dado $\epsilon > 0$, existe $n_\epsilon \geq 0$ tal que

$$d((x, y), (x, w)) < \epsilon, \forall (x, w) \in P^{n_\epsilon}(L_{x'}),$$

onde

$$L_{x'} \in P^{-n_\epsilon}(L_x) = \{L' \in \mathcal{F} : P^{n_\epsilon}(L') \subset L_x\} \quad \text{e} \quad (x, y) \in P^{n_\epsilon}(L_{x'}).$$

Pelo Lema 83, temos que:

$$S \setminus (L_{-1/2} \cup L_{1/2}) \subset \bigcup_{(x', y') \in W^u(p, P)} L_{x'}.$$

Então, existe $(x', y') \in W^u(p, P) \cap L_{x'}$, onde $d((x, y), P^{n_\epsilon}(x', y')) < \epsilon$.

Dado que ϵ é arbitrário e $P^{n_\epsilon}(x', y') \in W^u(p, P)$, concluímos que $(x, y) \in \overline{W^u(p, P)}$. $\square$

Teorema 85. *O subconjunto compacto $A = \overline{\bigcap_{n \geq 0} P^n(\Sigma)}$ é uma classe homoclínica.*

Demonstração. Dado que $H_P(p) = \overline{W^u(p, P) \cap W^s(p, P)} \subset \overline{W^u(p, P)}$, pelo Lema 6, obtemos

$$H_P(p) \subset A.$$

Agora, vejamos $A \subset H_P(p)$. Pelo Lema 84, é suficiente provar que $W^u(p, P) \subset H_P(p)$.

De fato, seja $q \in W^u(p, P) \subset A$, escolha $J \subset W^u(p, P)$, J aberto e horizontal, tal que $q \in J$.

Seja L uma folha estável tal que $p \in L$. Como f é LEO, existe $n \geq 0$ tal que

$$f^n(\Pi(J)) = (-1/2, 1/2),$$

então, $P^n(J) \cap L \neq \emptyset$ e assim,

$$J \cap P^{-n}(L) \neq \emptyset.$$

Portanto,

$$\exists s \in J \cap P^{-n}(L) \subset W^u(p, P) \cap W^s(p, P) \text{ perto de } q.$$

$\square$

Teorema 86. *O atrator de Lorenz é uma classe homoclínica.*

Demonstração. Como $\Lambda = \overline{\bigcup_{t \geq 0} X_t(A)}$, pelo Teorema 4, temos que Λ é uma classe homoclínica do fluxo X . $\square$

10. O TEOREMA DE HARTMAN-GROBMAN

Teorema 1. *Seja $f \in \text{Dif}^r(M)$, onde $p \in M$ é ponto fixo hiperbólico de f , $A = Df_p : TM_p \rightarrow TM_p$. Então, existem vizinhanças $V(p) \subset M$, $U(0) \subset TM_p$ e $h : U \rightarrow V$ homeomorfismo tal que*

$$hA = fh$$

Podemos supor que $p = 0$. Para a prova, necessitaremos de alguns lemas.

Lema 87. *Sejam E espaço de Banach, $L \in \mathcal{L}(E, E)$ com $\|L\| \leq a < 1$ e $G \in \mathcal{L}(E, E)$ isomorfismo com $\|G^{-1}\| \leq a < 1$. Então*

- (1) $I + L$ é isomorfismo, $\|(I + L)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-a}$.
- (2) $I + G$ é isomorfismo, $\|(I + G)^{-1}\| \leq \frac{a}{1-a}$.

Demonstração.

- (1) Dado $y \in E$, definimos uma contração $u : E \rightarrow E$ por $u(x) = y - Lx$. Pelo teorema do ponto fixo de Banach, u possui um único ponto fixo. Portanto, existe um único $x \in E$ tal que $y = (I + L)x$. Segue-se que $I + L$ é isomorfismo.

$$\|y\| = 1 \implies (1-a)\|x\| \leq \|x + Lx\| = 1 \implies \|x\| \leq \frac{1}{1-a}.$$

$$\text{Logo, } \|(I + L)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-a}.$$

- (2) $I + G = G(I + G^{-1})$ é isomorfismo pelo item anterior.

$$(I + G)^{-1} = (I + G^{-1})^{-1}G^{-1} \implies \|(I + G)^{-1}\| \leq \|(I + G^{-1})^{-1}\| \|G^{-1}\| = \frac{a}{1-a}.$$

□

Lema 88. *Seja A um isomorfismo linear hiperbólico. Existe $\epsilon > 0$ tal que, se $\phi_1, \phi_2 \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$ têm constante de Lipschitz $\leq \epsilon$, então $A + \phi_1$ e $A + \phi_2$ são conjugadas.*

Demonstração. Buscamos um homeomorfismo $h = I + u$ que conjugue $A + \phi_1$ a $A + \phi_2$. Para isso, buscaremos $u \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$ tal que $(I+u)(A+\phi_1) = (A+\phi_2)(I+u)$. Rescrevendo,

$$Au - u(A + \phi_1) = \phi_1 - \phi_2(I + u).$$

Seja $\epsilon < \|A^{-1}\|^{-1}$. $A + \phi_1$ um homeomorfismo, uma vez que, para todo $y \in \mathbb{R}^m$, $F(x) = A^{-1}y - A^{-1}\phi(x)$ é uma contração, e portanto possui um único ponto fixo, o qual satisfaz $(A + \phi_1)(x) = y$. Pelo mesmo motivo, $A + \phi_2$ é um homeomorfismo.

Consideremos $\mathcal{L} : C_b^0(\mathbb{R}^m) \rightarrow C_b^0(\mathbb{R}^m)$, $\mathcal{L}(u) = Au - u(A + \phi_1)$. Mostraremos que $\mathcal{L}$ é invertível. Para isso, basta provarmos que $\mathcal{L}^*(u) = u - A^{-1}uA - u\phi_1$ é invertível, pois A é invertível. Notemos que $C_b^0(\mathbb{R}^m, E^u)$, $C_b^0(\mathbb{R}^m, E^s) \subset C_b^0(\mathbb{R}^m)$ são invariantes por $\mathcal{L}^*$ pois E^u e E^s são invariantes por A^{-1} . Portanto, podemos decompor $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}^{*s} + \mathcal{L}^{*u}$.

$\mathcal{L}^{*s}$ é invertível pelo lema anterior, pois $u \in E^s \mapsto A^{-1}u(A + \phi_1)$ é invertível e tal que sua inversa $u \in E^s \mapsto Au(A + \phi_1)^{-1}$ é uma contração com norma limitada por $a < 1$. Além disso, $\|(\mathcal{L}^{*s})^{-1}\| \leq \frac{a}{1-a}$. Analogamente, $\mathcal{L}^{*u}$ é invertível e $\|(\mathcal{L}^{*u})^{-1}\| \leq \frac{1}{1-a}$.

Portanto, $\mathcal{L}$ é invertível e

$$\|\mathcal{L}^{-1}\| = \|\mathcal{L}^{*-1}A^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-a}.$$

Tomemos $\epsilon < (1-a)\|A^{-1}\|^{-1}$ (este será o ϵ do enunciado). Definamos $\mu : C_b^0(\mathbb{R}^m) \rightarrow C_b^0(\mathbb{R}^m)$ por $\mu(u) = \mathcal{L}^{-1}[\phi_1 - \phi_2(I+u)]$. Temos

$$\begin{aligned} \|\mu(u_1) - \mu(u_2)\| &= \|\mathcal{L}^{-1}[\phi_2(I+u_2) - \phi_2(I+u_1)]\| \\ &\leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-a} \epsilon \|u_2 - u_1\|. \end{aligned}$$

Pela escolha de ϵ , μ é uma contração e portanto possui um único ponto fixo $u \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$. Concluimos que $(I+u)(A+\phi_1) = (A+\phi_2)(I+u)$ possui uma única solução em $C_b^0(\mathbb{R}^m)$. Da mesma forma, $(A+\phi_1)(I+v) = (I+v)(A+\phi_2)$ possui uma única solução $v \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$. Afirmamos que

$$(I+u)(I+v) = (I+v)(I+u) = I.$$

De fato,

$$\begin{aligned} (I+u)(I+v)(A+\phi_2) &= (I+u)(A+\phi_1)(I+v) \\ &= (A+\phi_2)(I+u)(I+v) \end{aligned}$$

Ou seja, $(I+w)(A+\phi_2) = (A+\phi_2)(I+w)$, onde $w = u + v + uv \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$. Por unicidade, concluimos que $w = 0$, donde $(I+u)(I+v) = I$. Portanto, $I+u$ é um homeomorfismo, e concluimos que $h = I+u$ é uma conjugação. $\square$

Lema 89. *Dado $\epsilon > 0$, existem uma vizinhança U de 0 e uma extensão de $f|_U$ da forma $A + \phi$, onde $\phi \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$ tem constante de Lipschitz $\leq \epsilon$.*

Demonstração. Tomemos $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que

- $\alpha(t) = 0$ se $t \geq 1$;
- $\alpha(t) = 1$ se $t \leq \frac{1}{2}$;
- $|\alpha'(t)| < k \quad \forall t \in \mathbb{R}, k > 2$.

Lembre que $f = A + \varphi$, onde $\varphi(0) = 0$, $D\varphi_0 = 0$. Seja B_β bola de centro 0 e raio β tal que $\|D\varphi\|_{B_\beta} < \frac{\epsilon}{2k}$.

Tome $\phi(x) = \alpha(\|x\|/r) \cdot \varphi(x)$. Afirmamos que $\phi(x)$ satisfaz as condições do lema. De fato, $A + \phi$ extensão de $f|_{B_{\beta/2}}$ e, se $x_1, x_2 \in B_\beta$, então

$$\begin{aligned} \|\phi(x_1) - \phi(x_2)\| &\leq \|[\alpha(\|x_1\|/\beta) - \alpha(\|x_2\|/\beta)]\varphi(x_1)\| + \|\alpha(\|x_2\|/\beta)[\varphi(x_1) - \varphi(x_2)]\| \\ &\leq k \frac{\|\|x_1\| - \|x_2\|\|}{r} \frac{\epsilon}{2k} \|x_1\| + k \frac{\|x_2\|}{r} \frac{\epsilon}{2k} \|x_1 - x_2\| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} \|x_1 - x_2\| + \frac{\epsilon}{2} \|x_1 - x_2\| = \epsilon \|x_1 - x_2\|. \end{aligned}$$

Se $x_1 \in B_\beta, x_2 \notin B_\beta$, ento $\|\phi(x_1) - \phi(x_2)\| \leq \frac{\epsilon}{2} \|x_1 - x_2\| \leq \epsilon \|x_1 - x_2\|$. Finalmente, se $x_1, x_2 \notin B$, ento $\|\phi(x_1) - \phi(x_2)\| = 0 \leq \epsilon \|x_1 - x_2\|$. Concluimos que ϕ tem constante de Lipschitz limitada por ϵ . $\square$

Demonstração (teorema de Hartman-Grobman). Seja $\epsilon > 0$ como no lema 88. Seja $A + \phi$ uma extensão de $f|_U$, onde U é uma vizinhança de 0 e ϕ tem constante de Lipschitz $\leq \epsilon$. Pelo lema 88, existe $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ homeomorfismo tal que $hA = (A + \phi)h$. Logo, $hA = fh$ em U . $\square$

11. O λ -LEMA (LEMA DA INCLINAÇÃO)

Seja f um difeomorfismo C^r de uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^m$ tal que 0 é ponto fixo hiperbólico, e seja $A = Df_0$ o isomorfismo hiperbólico correspondente, com subespaços invariantes estável E^s e instável E^u .

Podemos supor que $W_{\text{loc}}^s(0) \subset E^s$ e $W_{\text{loc}}^u(0) \subset E^u$. De fato, pelo teorema da variedade estável, existe uma aplicação C^r , $\varphi_s : B_\beta^s \rightarrow E^u$, onde B_β^s é a bola de centro 0 e raio β contida em E^s , satisfazendo $\varphi_s(0) = 0$, $D\varphi_{s,0} = 0$ e tal que $W_{\text{loc}}^s(0)$ é gráfico de φ_s . Analogamente, existe $\varphi_u : B_\beta^u \rightarrow E^s$ satisfazendo $\varphi_u(0) = 0$, $D\varphi_{u,0} = 0$ e tal que $W_{\text{loc}}^u(0)$ é gráfico de φ_u .

Definamos então

$$\begin{aligned} \varphi : B_\beta^s \oplus B_\beta^u &\rightarrow E^s \oplus E^u \\ \varphi(x_s, x_u) &= (x_s - \varphi_u(x_u), x_u - \varphi_s(x_s)) \end{aligned}$$

e notemos que φ é difeomorfismo local de classe C^r de uma vizinhança de 0, pois $D\varphi_0$ é a identidade. Logo, $\tilde{f} = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ é um difeomorfismo de uma vizinhança $\tilde{V}$ da origem com $\tilde{f}(0) = 0$, $D\tilde{f}_0 = A$ e tal que $W_{\text{loc}}^s(0) = \varphi(\text{Graf.}(\varphi_s) \cap \tilde{V}) \subset E^s$ e $W_{\text{loc}}^u(0) = \varphi(\text{Graf.}(\varphi_u) \cap \tilde{V}) \subset E^u$.

Com essa hipótese, sejam então $B^s \subset E^s$ uma bola contida em $W_{\text{loc}}^s(0)$, $B^u \subset E^u$ uma

bola contida em $W_{\text{loc}}^u(0)$ e $V = B^s \times B^u$. Tomemos $q \in W^s(0) \setminus \{0\}$ e D^u um disco de dimensão $\dim E^u$ transversal a $W_{\text{loc}}^s(0)$ em q .

Lema 90. *Sejam $V = B^s \times B^u$, $q \in W^s(0) \setminus \{0\}$ e D^u como acima. Seja D_n^u a componente conexa de $f^n(D^u) \cap V$ contendo $f^n(q)$. Dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_0$, ento D_n^u est ϵ C^1 -próximo de B^u .*

Demonstração. Em V , podemos escrever

$$f(x_s, x_u) = (A^s x_s + \phi_s(x_s, x_u), A^u x_u + \phi_u(x_s, x_u))$$

onde

$$\begin{aligned} (Df)_p &= (A^s, A^u), \quad x_s \in B^s, \quad x_u \in B^u \\ \|A^s\| &\leq a < 1, \quad \|(A^u)^{-1}\| \leq a < 1 \\ \left. \frac{\partial \phi_s}{\partial x_u} \right|_{B^u} &= \left. \frac{\partial \phi_u}{\partial x_s} \right|_{B^s} = 0 \end{aligned}$$

Como $\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(0, 0) = 0$, $i, j = s, u$, por continuidade, existe $V' \subset V$ tal que

$$\max_{V'} \left\| \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \right\| \leq k, \quad i, j = s, u,$$

onde $k > 0$ é suficientemente pequeno para que

$$a + k < 1, \quad b = \left(\frac{1}{a} - k\right) > 1, \quad k < \frac{(b-1)^2}{4}.$$

Iterando, se necessário, podemos supor que $q \in V'$ e $D^u \subset V'$. Mostraremos inicialmente que $(TD^u)_q$ se aproxima de B^u sob Df . Para isso, seja $v_0 = (v_0^s, v_0^u)$ um vetor unitário qualquer em $(TD^u)_q$, e seja $\lambda_0 = \frac{\|v_0^s\|}{\|v_0^u\|}$ a inclinação de v_0 . Por transversalidade, $\|v_0^u\| \neq 0$.

Consideremos

$$\begin{aligned} q_1 &= f(q), \quad v_1 = (Df)_q(v_0) \\ q_2 &= f^2(q), \quad v_2 = (Df)_{q_1}(v_1) \\ &\vdots \\ q_n &= f^n(q), \quad v_n = (Df)_{q_{n-1}}(v_{n-1}) \end{aligned}$$

Para $q \in B^s$,

$$(Df)_q(v_0) = \begin{pmatrix} A^s + \frac{\partial \phi_s}{\partial x_s}(q) & \frac{\partial \phi_s}{\partial x_u}(q) \\ 0 & A^u + \frac{\partial \phi_u}{\partial x_u}(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0^s \\ v_0^u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^s v_0^s + \frac{\partial \phi_s}{\partial x_s}(q) v_0^s + \frac{\partial \phi_s}{\partial x_u}(q) v_0^u \\ A^u v_0^u + \frac{\partial \phi_u}{\partial x_u}(q) v_0^u \end{pmatrix}.$$

Denotando por λ_i a inclinação de v_i , temos que

$$\lambda_1 = \frac{\|A^s v_0^s + \frac{\partial \phi_s}{\partial x_s}(q) v_0^s + \frac{\partial \phi_s}{\partial x_u}(q) v_0^u\|}{\|A^u v_0^u + \frac{\partial \phi_u}{\partial x_u}(q) v_0^u\|}.$$

O numerador é majorado por $\|A^s v_0^s\| + \|\frac{\partial \phi_s}{\partial x_s}(q) v_0^s\| + \|\frac{\partial \phi_s}{\partial x_u}(q) v_0^u\| \leq a\|v_0^s\| + k\|v_0^s\| + k\|v_0^u\|$.

O denominador é minorado por $\|A^u v_0^u\| - \|\frac{\partial \phi_u}{\partial x_u}(q) v_0^u\| \geq \frac{1}{a}\|v_0^u\| - k\|v_0^u\|$.

Logo,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\leq \frac{a\lambda_0 + k\lambda_0 + k}{1/a - k} \leq \frac{\lambda_0 + k}{b} = \frac{\lambda_0}{b} + \frac{k}{b} \\ \lambda_2 &\leq \frac{\lambda_1}{b} + \frac{k}{b} \leq \frac{\lambda_0}{b^2} + k \sum_{i=1}^2 \frac{1}{b^i} \\ &\vdots \\ \lambda_n &\leq \frac{\lambda_0}{b^n} + k \sum_{i=1}^n \frac{1}{b^i} \leq \frac{\lambda_0}{b^n} + \frac{k}{b-1}. \end{aligned}$$

Segue-se que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_n \leq \frac{b-1}{4}$ para todo $n > n_0$, pois $\frac{\lambda_0}{b^n} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$ e $\frac{k}{b-1} < \frac{b-1}{4}$. Como v_0 pode ser escolhido de forma a maximizar λ_0 , essa estimativa vale com o mesmo n_0 para qualquer $v_0 \in (TD^u)_q$ unitrio.

Tomemos $0 < k_1 < \min(\epsilon, k)$. Pela continuidade de $\frac{\partial \phi_s}{\partial x_u}$ e pela compacidade de B^u , existe $0 < \delta < \epsilon$ tal que

$$\max_{V_1} \left\| \frac{\partial \phi_s}{\partial x_u} \right\| \leq k_1,$$

onde $V_1 = \delta B^s \times B^u \subset V$.

Tambm, pela continuidade do plano tangente a $D_{n_0}^u$ em q_{n_0} , existe um disco $\tilde{D}^u$ mergulhado em $D_{n_0}^u$ com centro q_{n_0} tal que a inclinação λ de qualquer vetor unitário em $(T\tilde{D}^u)_p$, $p \in \tilde{D}^u$, satisfaz $\lambda \leq \frac{b-1}{2}$.

Seja $v = (v^s, v^u)$ um vetor unitário de $(T\tilde{D}^u)_p$, para $p \in \tilde{D}^u$, e seja $\lambda_{n_0} = \left\| \frac{v^s}{v^u} \right\|$ a

inclinação de v .

$$(Df)_p(v) = \begin{pmatrix} A^s v^s + \frac{\partial \phi_s}{\partial x_s}(p)(v^s) + \frac{\partial \phi_s}{\partial x_u}(p)(v^u) \\ \frac{\partial \phi_u}{\partial x_s}(p)(v^s) + A^u v^u + \frac{\partial \phi_u}{\partial x_u}(p)(v^u) \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{n_0+1} = \frac{\|A^s v^s + \frac{\partial \phi_s}{\partial x_s}(p)(v^s) + \frac{\partial \phi_u}{\partial x_u}(p)(v^u)\|}{\|\frac{\partial \phi_u}{\partial x_s}(p)(v^s) + A^u v^u + \frac{\partial \phi_u}{\partial x_u}(p)(v^u)\|}$$

O numerador é majorado por $a\|v^s\| + k\|v^s\| + k_1\|v^u\|$ e o denominador é minorado por $\|A^u v^u\| - \|\frac{\partial \phi_u}{\partial x_u}(p)(v^u)\| - \|\frac{\partial \phi_u}{\partial x_s}(p)(v^s)\| \geq \frac{1}{a}\|v^u\| - k\|v^u\| - k\|v^s\|$. Daí,

$$\begin{aligned} \lambda_{n_0+1} &\leq \frac{a\lambda_{n_0} + k\lambda_{n_0} + k_1}{1/a - k - k\lambda_{n_0}} \\ &\leq \frac{\lambda_{n_0} + k_1}{b - k\lambda_{n_0}} \\ &\leq \frac{\lambda_{n_0} + k_1}{b - \frac{b-1}{2}} = \frac{\lambda_{n_0} + k_1}{\frac{b+1}{2}}. \end{aligned}$$

Denotando $b_1 = \frac{b+1}{2}$, temos que $b_1 > 1$. Por indução, $\lambda_{n_0+n} \leq \frac{\lambda_{n_0}}{b_1^n} + k_1 \sum_{i=1}^n \frac{1}{b_1^i} \leq \frac{\lambda_{n_0}}{b_1^n} + \frac{k_1}{b_1-1}$.

Como $\frac{\lambda_{n_0}}{b_1^n} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$, existe $\tilde{n}$ tal que, para todo $n \geq \tilde{n}$,

$$\lambda_{n_0+n} \leq \epsilon \left(1 + \frac{1}{b_1 - 1}\right).$$

Como v pode ser escolhido de forma a maximizar λ_{n_0} , essa estimativa vale com o mesmo $\tilde{n}$ para qualquer $v \in (T\tilde{D}^u)_p$ unitário. Ou seja, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $\tilde{n}$ tal que, para $n \geq \tilde{n}$, $f^n(\tilde{D}^u) \cap V_1$ tem todos os seus vetores tangentes não nulos com inclinação menor que ϵ .

Por outro lado, se (v_n^s, v_n^u) é vetor tangente não nulo a $f^n(\tilde{D}^u) \cap V_1$ em p e $Df_p(v_n^s, v_n^u) = (v_{n+1}^s, v_{n+1}^u)$,

$$\frac{\sqrt{(v_{n+1}^s)^2 + (v_{n+1}^u)^2}}{\sqrt{(v_n^s)^2 + (v_n^u)^2}} = \frac{\|v_{n+1}^u\|}{\|v_n^u\|} \sqrt{\frac{1 + \lambda_{n+1}^2}{1 + \lambda_n^2}}.$$

Além disso,

$$\frac{\|v_{n+1}^u\|}{\|v_n^u\|} \geq \frac{\frac{1}{a}\|v^u\| - k\|v^u\| - k\|v^s\|}{\|v_n^u\|} = \left(\frac{1}{a} - k\right) - k\lambda_n.$$

Como λ_{n+1} e λ_n são arbitrariamente pequenos, temos que as normas dos iterados dos vetores tangentes não nulos de $f^n(\tilde{D}^u) \cap V_1$ crescem numa razão arbitrariamente próxima de $b = \frac{1}{a} - k > 1$. Logo, os diâmetros de $f_n(\tilde{D}^u)$ aumentam exponencialmente. Juntamente

com a inclinação uniformemente pequena dos planos tangentes, isso implica que existe $\tilde{n}$ tal que, para todo $n > \tilde{n}$, a componente conexa de $f^n(D^u) \cap V_1$ contendo $f^n(q)$ é C^1 -próxima de B^u , e demonstra o λ -lema. $\square$

REFERÊNCIAS

- [1] V. Araújo and M. J. Pacifico. *Three-dimensional flows*, volume 53 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer, Heidelberg, 2010. With a foreword by Marcelo Viana.
- [2] B. Hasselblatt and A. Katok *A first course in dynamics*. Cambridge University Press, New York, 2003.
- [3] C. Robinson. *An introduction to dynamical systemscontinuous and discrete.*, Volume 19 of *Pure and Applied Undergraduate Texts*. American Mathematical Society, 2012.
- [4] Corinna Ulcigrai and Thomas Jordan *Dynamical Systems and Ergodic Theory, Teaching Block*. 2012/2013.

(M.J.P.) INSTITUTO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO,, C. P. 68.530,
21.945-970 RIO DE JANEIRO, BRAZIL

E-mail address: pacifico@im.ufrj.br