

Algunos contextos donde aparecen toros invariantes ¹

Àlex Haro

Universitat de Barcelona

1. Toros invariantes

Consideraremos sistemas dinámicos discretos, pero las definiciones y resultados se pueden extender a sistemas dinámicos continuos, esto es, descritos mediante ecuaciones diferenciales.

Dado un difeomorfismo $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, que define un sistema dinámico

$$\bar{x} = F(x) ,$$

un toro invariante viene descrito por una inmersión $K : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$x = K(\theta) ,$$

que da la parametrización del toro, y un difeomorfismo en el toro $f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$ que nos da su dinámica, de modo que se satisface la ecuación funcional

$$F(K(\theta)) = K(f(\theta)) , \tag{1}$$

que es la ecuación de invariancia del toro.

Muchas veces se considera o se busca que la dinámica sobre el toro sea cuasiperiódica, esto es

$$f(\theta) = \theta + \omega ,$$

donde $\omega \in \mathbb{R}^d$ tal que para todo $k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ se tiene que $k \cdot \omega \notin \mathbb{Z}$ (se dice que ω es ergódico o no resonante). Así, muchas veces se identifican los toros (objetos geométricos) con movimientos cuasiperiódicos (dinámica).

Nosotros consideraremos dos contextos, y en cada uno de ellos algunos ejemplos importantes (pero no todos):

- Contexto disipativo: toros normalmente hiperbólicos;
- Contexto conservativo: toros KAM.

¹Este escrito es una breve introducción informal a los toros invariantes, y es una transcripción más o menos libre de la charla que dí en la primera reunión DANCE, en Salou, en marzo de 2003. Hay algunas extensiones respecto a la charla, motivadas principalmente por las intervenciones de la audiencia, que mejoraron substancialmente mi exposición. He dejado muchos temas por tratar, bien sea por falta de espacio o bien por ignorancia.

La sesión de **Toros Invariantes** fue dirigida por R. Ortega (UGR), a quien agradezco la oportunidad que me dio de participar, y fue completada por J. Villanueva (UPC), A. Delshams (UPC) y P. Torres (UGR).

Agradezco a los organizadores de los D Days el empeño y entusiasmo en la apertura de esta Red Temática, y el soporte dado para preparar mi exposición.

También agradezco a C. Simó el soporte “logístico” ofrecido, no sólo a la hora de hacer mi exposición sino también al proveerme de algunas de las figuras que aparecen en este escrito.

2. Contexto disipativo (o general)

Los toros normalmente hiperbólicos están aislados en el espacio de fase, y se distinguen por el hecho que las direcciones normales al toro tienen componentes atractoras y repulsoras (pensemos, por ejemplo, en un punto fijo tipo silla, que es un toro normalmente hiperbólico de dimensión cero).

En estos casos, la dinámica sobre el toro no tiene porqué ser cuasiperiódica, y la ecuación funcional (1) tiene como incógnitas K y f . La teoría forma parte de la teoría general de variedades normalmente hiperbólicas.

Nos restringimos aquí a los *skew-products*. Un sistema cuasiperiódico (discreto) viene descrito en la forma

$$\begin{cases} \bar{x} = F(x, \theta) , \\ \bar{\theta} = \theta + \omega , \end{cases}$$

donde $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\omega \in \mathbb{R}^d$ es ergódico.

De entre los posibles toros invariantes consideraremos aquéllos que son grafos de $x = K(\theta)$, esto es, de dimensión menor posible y que satisfacen la ecuación funcional

$$F(K(\theta), \theta) = K(\theta + \omega) . \quad (2)$$

A veces se llaman toros-respuesta (*response tori*), pues las frecuencias internas del toro son la respuesta a la excitación cuasiperiódica externa. Observamos que en este caso estamos fijando la dinámica sobre el toro : $f(\theta) = \theta + \omega$.

Ejemplo 1: La aplicación de Hénon cuasiperiódica. Una perturbación cuasiperiódica de la aplicación de Hénon es

$$\begin{cases} \bar{x} = 1 + y - a x^2 + \lambda \cos(2\pi\theta) \\ \bar{y} = bx \\ \bar{\theta} = \theta + \omega \quad (\text{mód } 1) \end{cases}$$

donde a, b son los parámetros de la aplicación de Hénon, ω es la frecuencia externa y λ es el parámetro que introduce el forzamiento. Para $\lambda = 0$, el sistema está desacoplado.

Como frecuencia externa hemos tomado $\omega = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$. En los siguientes ejemplos hemos fijado $a = 0.68$ y $b = -0.1$ y nos hemos preguntado sobre el comportamiento del sistema al variar λ . En particular, calculamos algunas curvas invariantes (figura 1) y sus variedades invariantes (figura 2). En la figura 3 mostramos cómo evolucionan los toros al perturbar el sistema. Observamos una bifurcación de doblamiento de periodo (deberíamos decir una *period halving bifurcation*), en la que las dos componentes de la curva periódica atractora “chocan” con la curva tipo silla para estabilizarla. Más adelante, vemos la evolución de este objeto atractor.

En familias de aplicaciones 2D, como la aplicación de Hénon, se demuestra que las tangencias homoclínicas entre variedades invariantes de puntos fijos tipo silla “producen” atractores extraños (M. Benedicks y L. Carleson 91, L. Mora y M. Viana 90, 93). También se ha probado la existencia de multitud de atractores extraños en flujos 3D (A. Pumariño

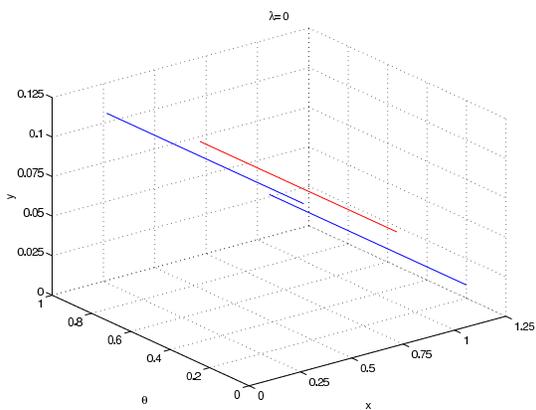
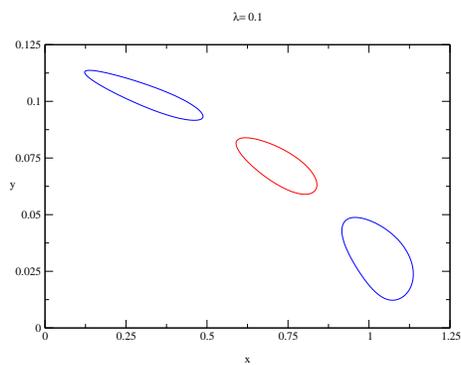
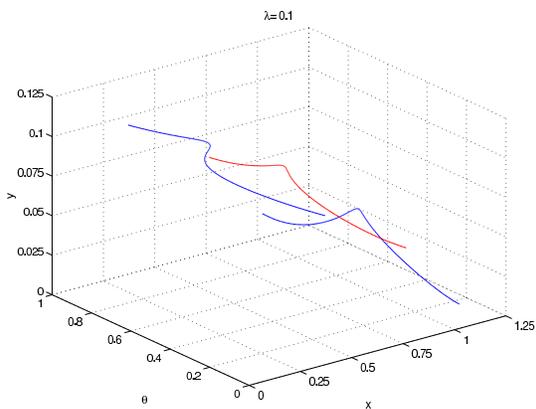
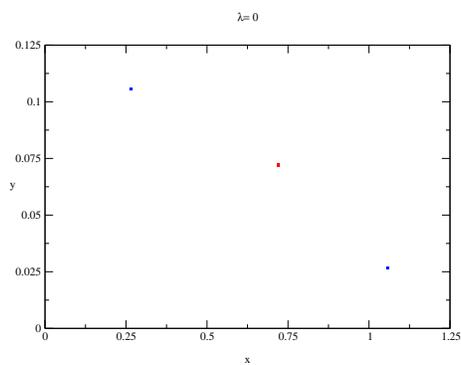
$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}$  \mathbb{R}^2 (proyección)

Figura 1: Un punto fijo tipo silla (rojo) y una órbita 2-periódica (azul) de la aplicación de Hénon se transforman en círculos cuando acoplamos con la rotación externa, con $\lambda = 0.1$.

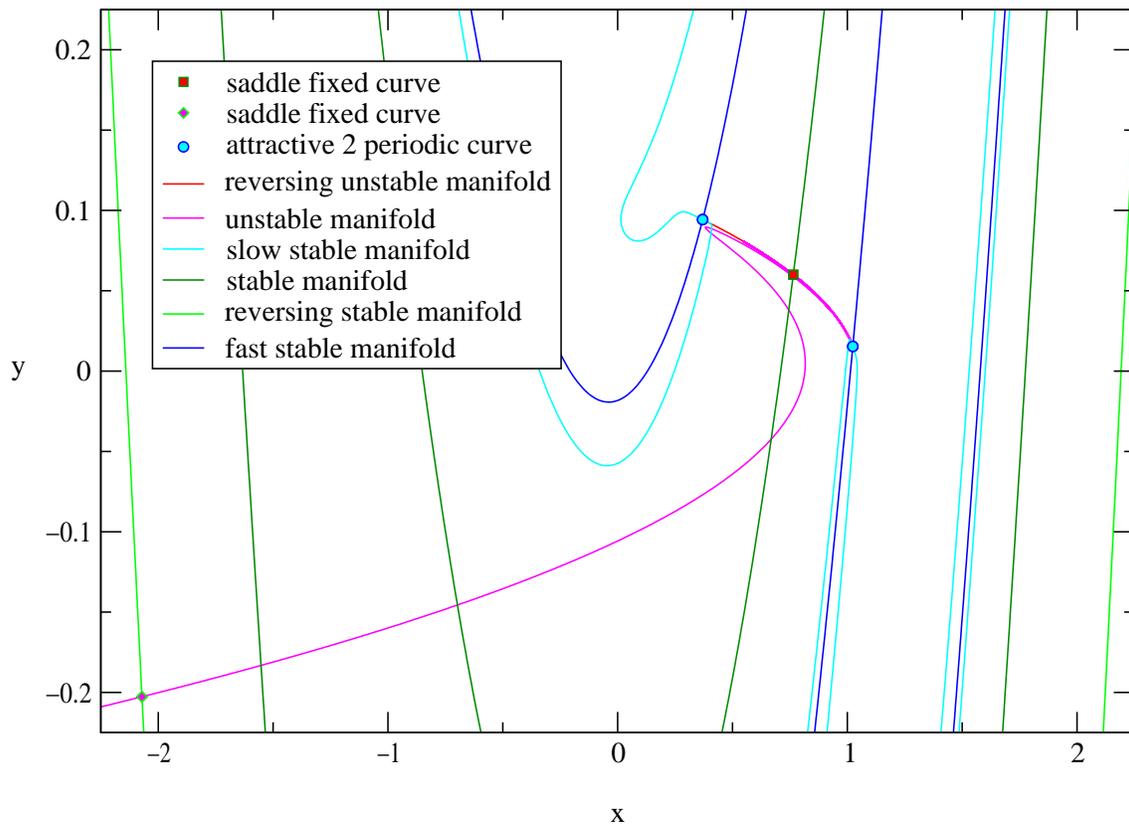
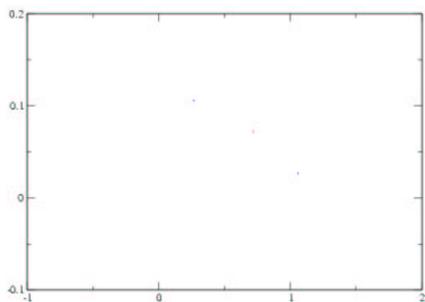
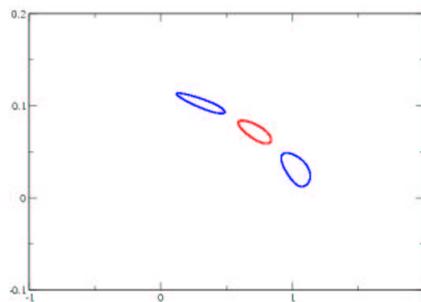


Figura 2: Secciones con el plano $\theta = 0$ de las variedades invariantes asociadas a los círculos anteriores ($\lambda = 0.1$).

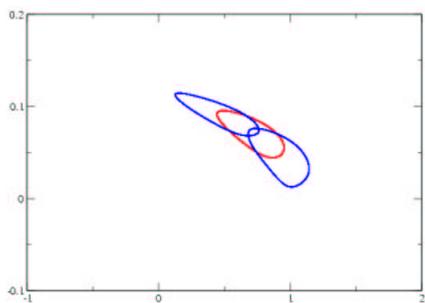
$\lambda = 0.00$



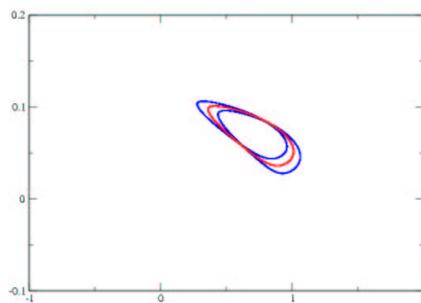
$\lambda = 0.10$



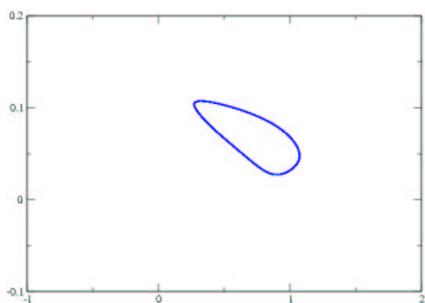
$\lambda = 0.20$



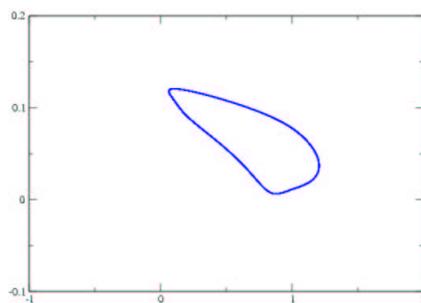
$\lambda = 0.25$



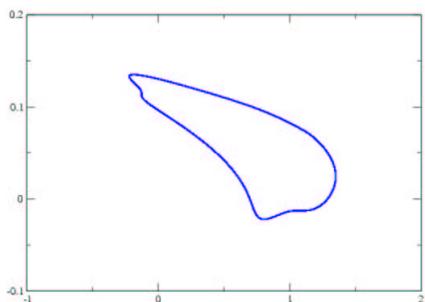
$\lambda = 0.30$



$\lambda = 0.40$



$\lambda = 0.50$



$\lambda = 0.60$

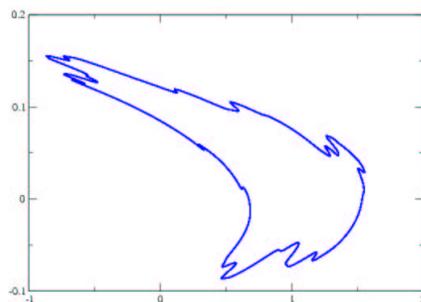


Figura 3: “Period halving bifurcation” y evolución de la curva atractor.

y J.A. Rodríguez 97) Algunas pruebas de la existencia de tales atractores se han hecho asistidas por computador (*computer assisted proofs*), demostrando la existencia de tales tangencias (Fornæs y Gavosto 92).

Una pregunta es, ¿se puede establecer un programa paralelo en el caso cuasiperiódico? Esto involucra:

- Problemas teóricos (desarrollar la teoría de tangencias homoclínicas entre variedades invariantes de un toro normalmente hiperbólico tipo silla y producción de atractores extraños);
- Problemas numéricos (cálculo de toros invariantes y sus variedades);
- Problemas computacionales (*computer assisted proofs*).

Ejemplo 2: La aplicación estándar cuasiperiódica. Una perturbación cuasiperiódica de la aplicación estándar (o *standard map*) es

$$\begin{cases} \bar{x} = x + \bar{y} & (\text{mód } 1) \\ \bar{y} = y - \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi}(\kappa + \lambda \cos(2\pi\theta)) \\ \bar{\theta} = \theta + \omega & (\text{mód } 1) \end{cases}$$

donde κ es el parámetro de la aplicación estándar y λ es el parámetro que introduce la excitación cuasiperiódica externa. En este caso hemos tomado ω como un cierto número algebraico de orden 3.

En la figura 4 mostramos una imagen en 3D (espacio de fase ampliado: $\mathbb{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}$) de las variedades estable (azul) e inestable (rojo) de una curva 2-periódica tipo silla para los parámetros $\kappa = 0.2$ y $\lambda = 0.5$. Observamos que hay intersecciones homoclínicas entre las variedades invariantes (las bandas azul-rojo). Las podemos apreciar mucho mejor si hacemos rebanadas a los objetos. La figura 5 muestra la intersección de tales objetos con $\theta = 0$, y algunas magnificaciones, apreciándose claramente el entramado homoclínico.

3. Contexto conservativo

Nos restringiremos al caso de conservación de la estructura simpléctica o hamiltoniana (se pueden considerar otros objetos geométricos que se conserven, como el volumen, o el contexto reversible). La dimensión del espacio de fase es par: $n = 2m$.

En un sistema dinámico conservativo pueden convivir:

- Movimiento regular (cuasiperiódico)
- Movimiento estocástico.

Además, pueden haber zonas de medida positiva (y “grande”) donde el movimiento sea cuasiperiódico. Nosotros consideraremos toros KAM (o más en general de dimensión

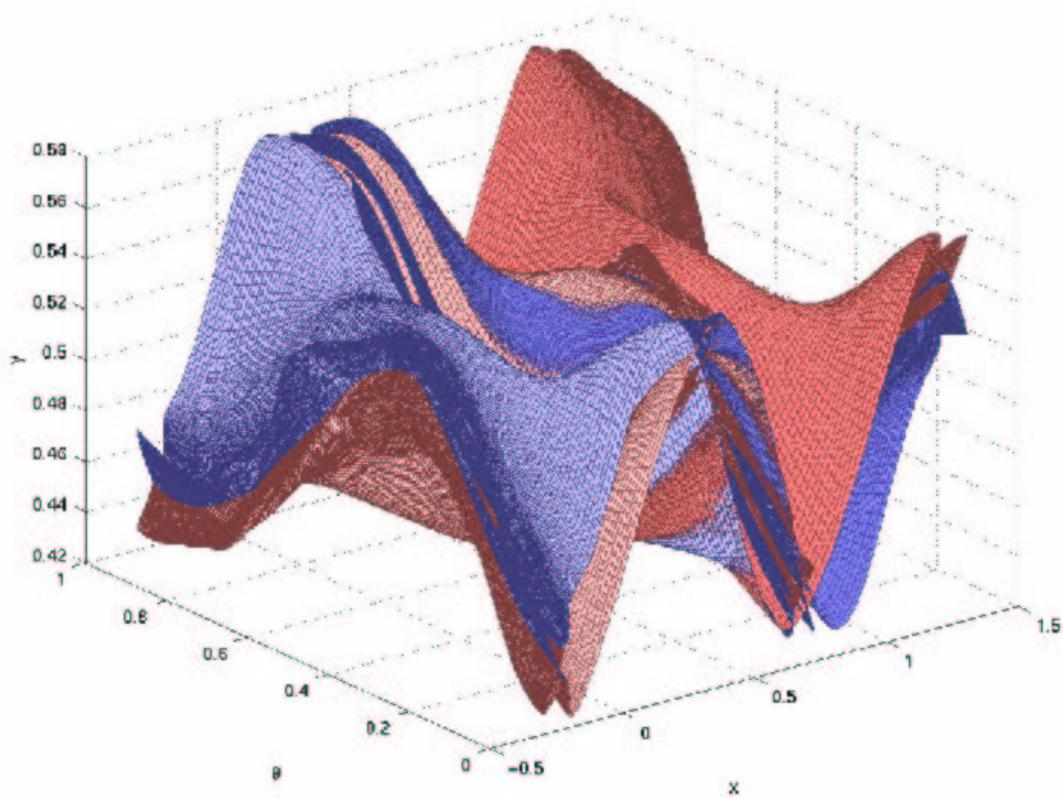


Figura 4: Variedades estable (azul) e inestable (rojo) de una curva 2-periódica tipo silla para la aplicación estándar cuasiperiódica.

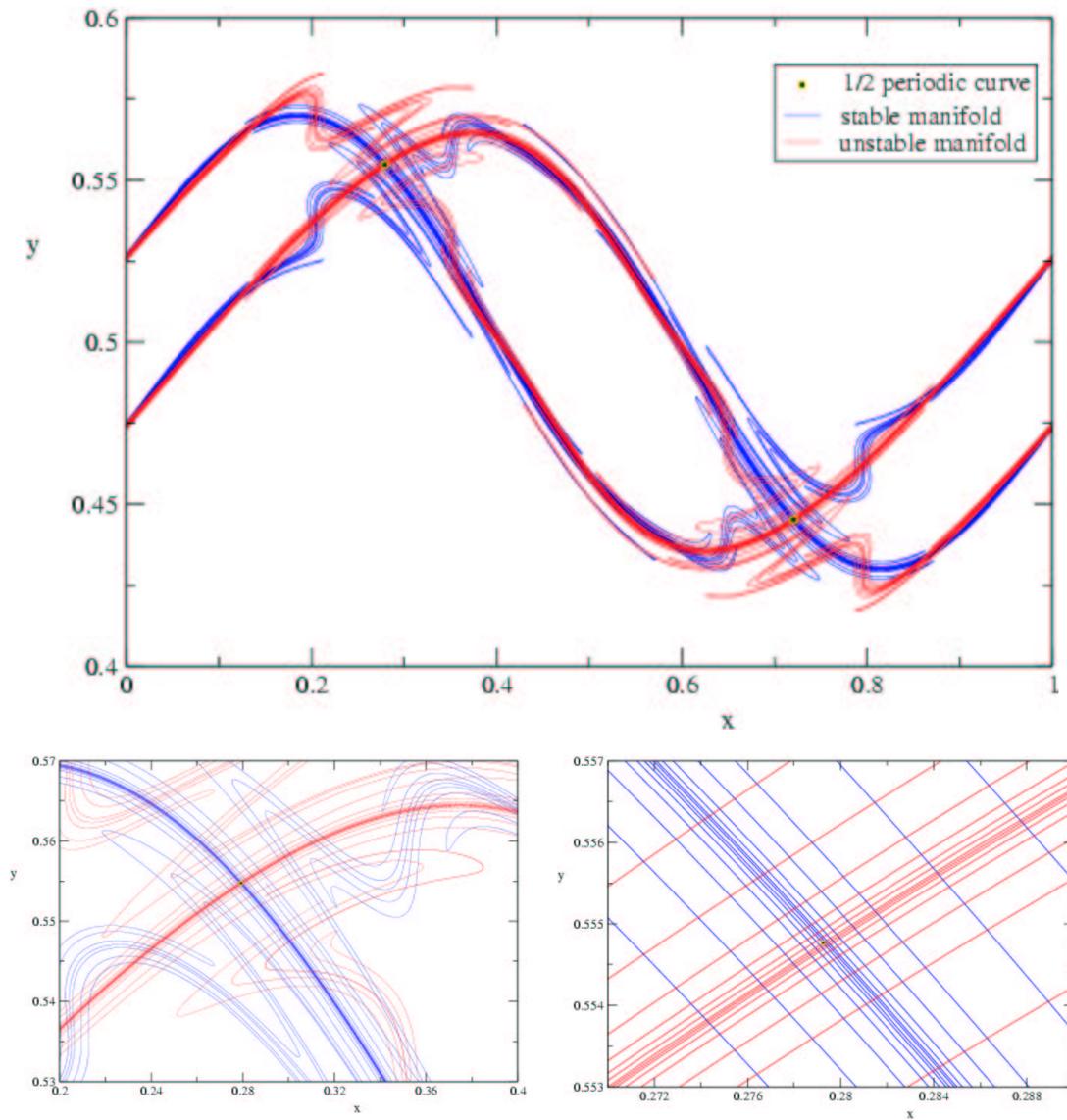


Figura 5: Secciones de las variedades invariantes con $\theta = 0$.

maximal: $d = m$), pero hay otros casos muy importantes (toros de dimensión baja, que pueden ser hiperbólicos, elípticos,...).

Así, en el contexto conservativo aparecen multitud de toros invariantes.

Rotura de toros invariantes

Puesto que los toros invariantes contienen el movimiento regular, el estudio de la rotura de toros invariantes es equivalente al estudio de la transición al caos en sistemas conservativos.

Ejemplo 3: La aplicación estándar. Un modelo famoso de sistema conservativo discreto es la aplicación estándar de Chirikov (la *standard map*), que es la aplicación que preserva área sobre el cilindro dada por

$$\begin{cases} \bar{x} = x + \bar{y} & (\text{mód } 1) \\ \bar{y} = y - \frac{\kappa}{2\pi} \sin(2\pi x) \end{cases}$$

Para $\kappa = 0$ el sistema es integrable, y el espacio de fase está foliado por toros invariantes (que son 1D), de la forma $y = y_0$ (además, $\omega = y_0$ es la rotación sobre el toro). Observamos que si $\kappa > 0$ es “pequeño”:

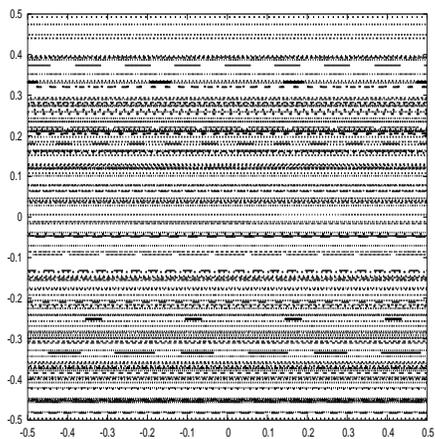
- La mayoría de toros invariantes persiste: toros KAM. Son toros no homotópicamente triviales, y contienen movimiento rotacional.
- Aparecen otros toros invariantes 1D: toros secundarios. Son toros homotópicamente triviales, y contienen movimiento libracional.
- Se producen redes homoclínicas y heteroclínicas asociadas a órbitas periódicas hiperbólicas, y contienen movimiento caótico.

Esto es lo que observamos en la figura 9.

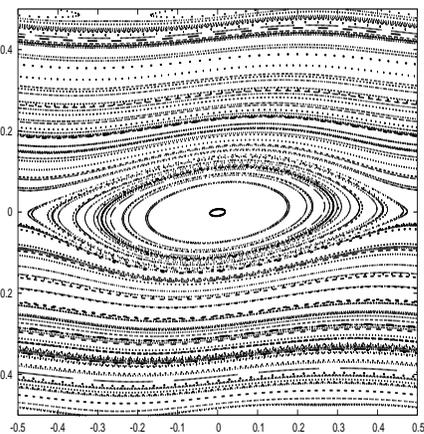
Observamos que en este modelo los toros 1D (primarios y secundarios) tienen codimensión 1 en el espacio de fase, y por tanto actúan como barreras. (En dimensión 4, los toros de dimensión maximal son 2D y no separan, de modo que las órbitas pueden viajar. Esto es lo que se conoce como difusión de Arnold).

Se sabe que para $\kappa = 1.0$ todos los toros KAM han sido destruidos. De hecho, se puede afinar mucho más este resultado, y hay evidencia numérica de que el valor crítico de rotura del toro áureo (aparentemente el más robusto, que tiene como número de rotación el número áureo) es aproximadamente $\kappa_c \approx 0.971635$ (Greene 79).

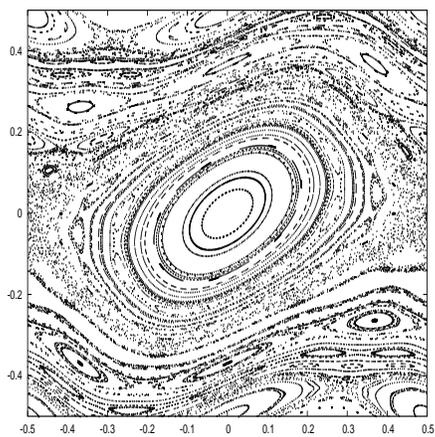
El responsable geométrico-dinámico de la rotura de las curvas invariantes es el entramado heteroclínico. Es decir, las variedades invariantes de las órbitas periódicas tipo silla, que tienen también codimensión 1, y que al intersectarse unas con otras actúan como obstrucciones a la existencia de los toros KAM (Olvera y Simó 87). Se pueden hacer demostraciones asistidas por computador de la existencia de tales intersecciones. Esta no es la única manera de probar no existencia de toros KAM, hay otras basadas en criterios



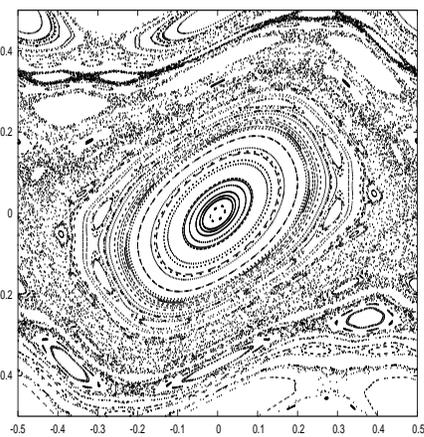
$\kappa = 0.0$



$\kappa = 0.2$



$\kappa = 0.9$



$\kappa = 1.0$

Figura 6: Evolución de la dinámica en la aplicación estándar.

variacionales y en criterios más geométricos (M. Herman 83, J. Mather 84). Ejemplos de *computer assisted proofs* son R.S. MacKay y I. Percival 85, que prueban que no hay toros KAM para $\kappa \geq 9.84375$, y I. Jungreis 91, que prueba que no hay toro KAM para $\kappa = 0.9178$. ¡Comparar estos valores con κ_c !). Por el otro lado, se ha podido demostrar que sí que existe toro áureo para $\kappa = 0.93$, con la ayuda de un ordenador (R. de la Llave y D. Rana 92). También se usan técnicas de análisis funcional, desde el punto de vista del grupo de renormalización (R.S. MacKay 82, y para hamiltonianos ver H. Koch 99, 02).

Justificaremos ahora porqué hemos introducido primero la perturbación cuasiperiódica de la estándar map. En el Ejemplo 2 sólo nos preocupábamos del comportamiento “hiperbólico” del modelo, y no del comportamiento conservativo (léase toros KAM, toros elípticos, resonancias, ...). Acabamos de ver que ambos comportamientos interactúan fuertemente. Así, un problema interesante es estudiar cómo se produce la transición al caos en sistemas cuasiperiódicos.

Otro problema importante es estudiar qué pasa en dimensión superior, cómo se rompen los toros KAM y cuáles son los mecanismos de rotura. Siguiendo el hilo anterior, podemos considerar objetos de codimensión 1 que obstruyan la existencia de toros KAM. Por ejemplo, variedades central-estable y central inestable de órbitas periódicas elíptico-hiperbólicas (también podemos considerar el caso de forzamientos cuasiperiódicos). Estas variedades influyen fuertemente en la dinámica del sistema.

Twist/Non-Twist

Pasemos ahora a otro orden de problemas. Una observación sobre el ejemplo de la aplicación estándar es que los toros KAM son grafos (esto es una consecuencia de un teorema de Birkhoff) y que la frecuencia es función creciente de la acción y (de la altura).

Respecto a la primera observación, no hay un teorema análogo en dimensión superior. Además, nos tenemos que preguntar sobre qué condiciones necesitamos para que tales observaciones sean posibles.

Nos restringiremos de nuevo al caso de dimensión más baja posible. Una aplicación que preserva área (*apm, area preserving map*) $F : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T} \times \mathbb{R}$ sobre el cilindro es de la forma

$$\begin{cases} \bar{x} = f(x, y) & (\text{mód } 1) \\ \bar{y} = g(x, y) \end{cases}$$

tal que $\det DF(x, y) = 1$. Se dice que es *twist* (y que el *twist* es positivo) si $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$ en todo $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$. Si cambia de signo decimos que F es *non-twist*.

Ejemplos de aplicaciones *twist* y *non-twist* son la aplicación estándar y la aplicación estándar cuadrática, respectivamente:

Twist standard map	Non-Twist quadratic standard map
$\begin{cases} \bar{x} = x + \bar{y} & (\text{mód } 1) \\ \bar{y} = y - \frac{\kappa}{2\pi} \sin(2\pi x) \end{cases}$	$\begin{cases} \bar{x} = x + \bar{y}^2 & (\text{mód } 1) \\ \bar{y} = y - \frac{\kappa}{2\pi} \sin(2\pi x) \end{cases}$

Si tomamos los correspondientes casos integrables ($\kappa = 0$) vemos que la frecuencia del toro $y = y_0$ es $\omega(y_0) = y_0$ en la aplicación estándar (y ω es función creciente de y_0) y $\omega = y_0^2$ en la cuadrática (y ω tiene un mínimo en $y_0 = 0$).

Un hecho destacado de las *apm non-twist* es que los toros KAM no tienen porqué ser grafos (M. Herman 83, À. Haro 98, C. Simó 98). Cuando un toro KAM tiene pliegues se dice que es una *meandering curve*. La figura 7 muestra algunos escenarios *non-twist*.

La figura 8 muestra una *higher order meandering curve* y varias magnificaciones. Así, estos toros pueden tener muchos pliegues.

Un concepto relacionado con los de *twist/non-twist* es el de torsión de un toro invariante. Se puede demostrar que la dinámica alrededor de un toro invariante de dimensión maximal se puede escribir formalmente como

$$\begin{cases} \bar{x} = \omega + x + \nabla_y H(y) & (\text{mód } 1) , \\ \bar{y} = y , \end{cases}$$

donde $H(y) = \frac{1}{2}y^\top B y + \dots$ es una función que empieza con términos de orden 2 (es de esta forma para conservar la simplecticidad). B es una matriz simétrica, que es precisamente la torsión del toro invariante, y nos da información a primer orden de cómo es la dinámica cerca del toro. En particular, nos dice cómo varían las frecuencias de los toros invariantes cercanos (un toro KAM es muy pegajoso).

Sigamos ahora en el caso 2D, y por tanto, los toros son 1D y B es un número. Si B es positivo, la frecuencia de los toros cercanos es creciente en y . Si $B = 0$, se dice que el toro no tiene torsión, o que es degenerado, o que es “shearless”, ... y tenemos que mirar los términos de orden superior. Si el término cúbico en H es positivo, entonces la frecuencia presenta un mínimo en nuestro toro ².

¿Cuál es la relación entre el *twist* de una *apm* y la torsión de los toros? Si la aplicación es *twist*, ya sabemos que los toros KAM (primarios) son grafos, y su torsión es positiva. Digamos que la dinámica cerca de un toro primario de una aplicación *twist* es *twist*. En el caso *non-twist* la situación es más rica. Ya hemos visto que los toros pueden ser *meandering*, pero esto no tiene que ver con su torsión. Genéricamente un toro tiene torsión no degenerada, de modo que la mayoría de toros de una *apm non-twist* son no degenerados, y la dinámica cerca de ellos es de tipo *twist* (positivo o negativo). Digamos que en coordenadas adecuadas la dinámica es generalmente de tipo *twist* (C. Simó 98 demostró la existencia de curvas *meandering*, construyendo una coordenadas adaptadas y aplicando el teorema del *twist* de Moser). También puede haber toros degenerados (A. Delshams y R. de la Llave 98 demostraron su existencia en familias biparamétricas de *apm non-twist*).

En las figuras 9 y 10 (À. Haro 02), calculamos la forma normal alrededor del toro áureo (con frecuencia el número áureo o similar), para la aplicación estándar y la cuadrática. Los cálculos se realizaron con un Pentium III a 730 MHz, aproximadamente. En las tablas aparecen los coeficientes de Taylor de la función $N(y) = y \cdot \nabla_y H(y) - H(y)$ (en particular, tiene que ser $N_0 = 0$ $N_1 = 0$ y $N_2 = B$)³.

² En dimensión superior, observemos que aunque el toro no sea degenerado, se pueden presentar otros casos, como que la torsión sea indefinida.

³El operador $H(x, y) \xrightarrow{\Delta} y \cdot \nabla_y H(x, y) - H(x, y)$ es una derivación en el álgebra de Lie de funciones, cuyo paréntesis es el de Poisson.

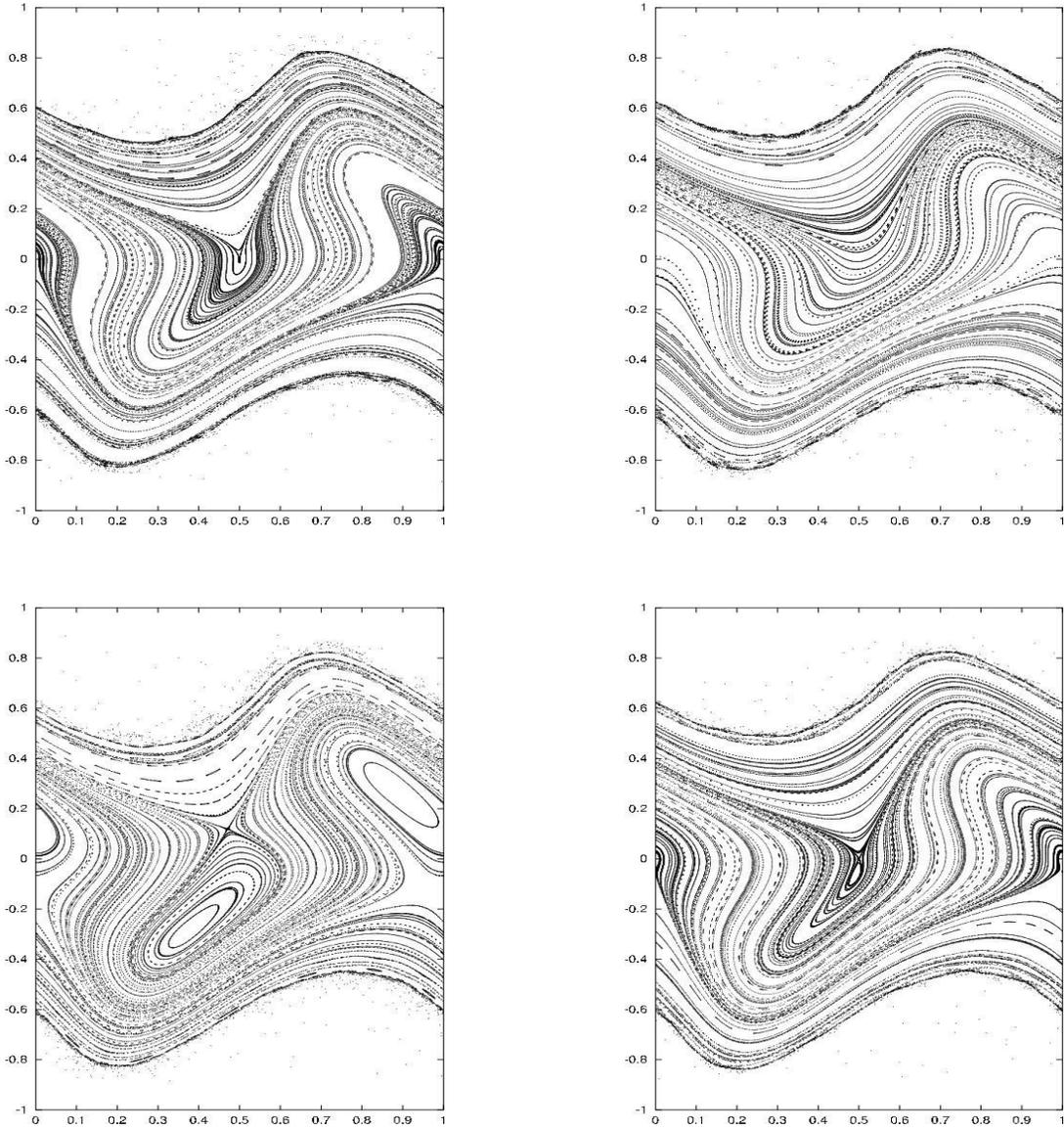


Figura 7: Algunos escenarios *non-twist*. Se observan curvas *meandering*.

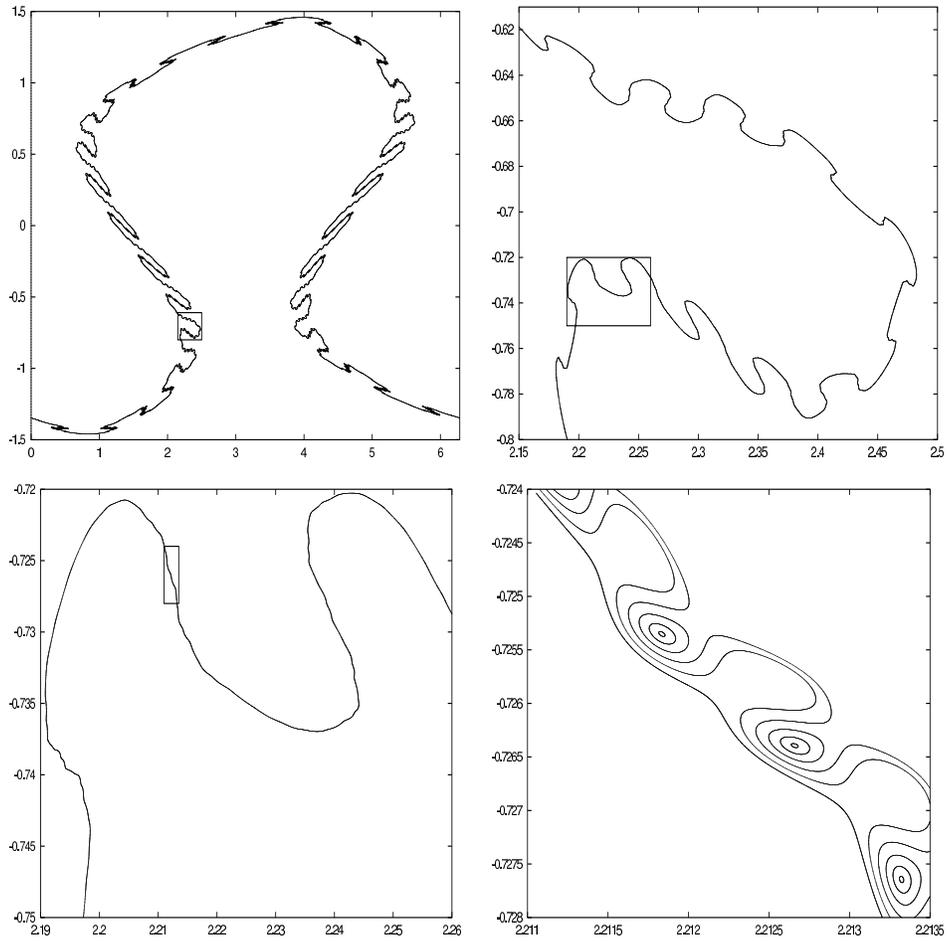


Figura 8: Diversas magnificaciones de una *higher order meandering curve* (cortesía de Carles Simó).

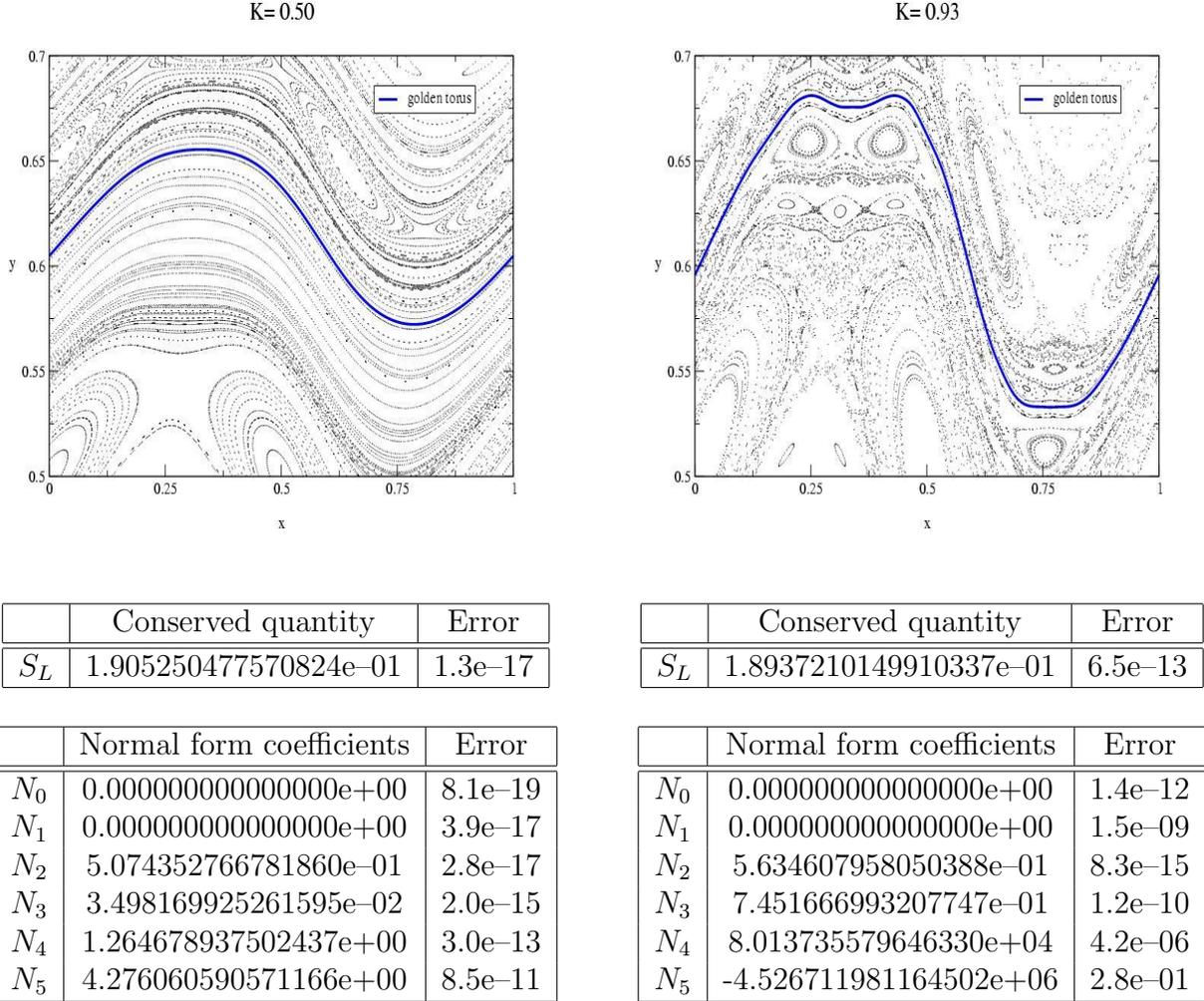
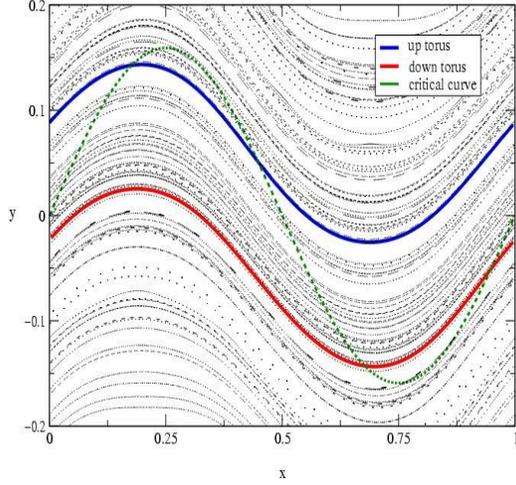


Figure 9: **Golden torus for the standard map.** The pictures show the KAM tori with frequency $\omega = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, for the values $\kappa = 0.5$ and $\kappa = 0.93$ of the standard map. Below each picture, two tables are presented: the first one shows the conserved quantity C , that is the average of $S_L(x)$, and an estimate of the error (the sup norm of $S_L(x) - C$); the second one shows the six first terms of the primitive function of the normal form, and estimates of the errors (the sup norms of the first six Taylor coefficients of $T \circ F + S - N \circ G - T$). Notice that closer we are to the breakdown, bigger are the coefficients of the normal form. They explode in the breakdown.

(While we need 150 harmonics to expand the torus for $\kappa = 0.5$, this number increases to 250 for $\kappa = 0.93$. The execution times in the computation of the corresponding normal forms are 1m31.750s and 7m42.380s, respectively.)

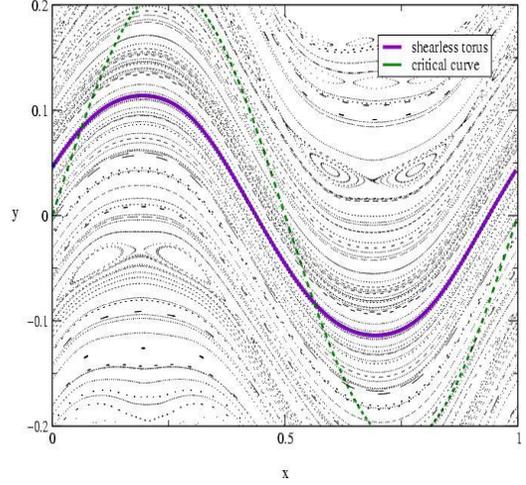
$\lambda=0.375, \kappa=1.0$



	Conserved quantity	Error
\tilde{S}_L	1.240170635035874e-04	7.8e-20

	Normal form coefficients	Error
N_0	0.0000000000000000e+00	8.2e-20
N_1	0.0000000000000000e+00	8.1e-21
N_2	5.617318688130254e-02	5.2e-18
N_3	6.531507200319253e-01	1.4e-17
N_4	5.191983218671878e-02	1.0e-17
N_5	2.391633538363182e-01	1.2e-15

$\lambda=0.375, \kappa=1.3614077736$



	Conserved quantity	Error
\tilde{S}_L	9.700000000000000e-18	1.2e-10

	Normal form coefficients	Error
N_0	0.0000000000000000e+00	1.1e-10
N_1	0.0000000000000000e+00	1.7e-10
N_2	3.279562910144461e-09	7.0e-18
N_3	6.370957460790143e-01	1.3e-17
N_4	6.360110805374549e-09	7.9e-17
N_5	4.942121748139058e-01	4.8e-16

Figure 10: **Collision of two KAM tori in the quadratic standard map.** For $\lambda = 0.375$, $\kappa = 1.0$, the quadratic standard map has two invariant tori (up and down) with frequency $\omega = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$. Although these tori are non twist (they cross the critical curve), they are definite. The tables correspond to the up torus, and it is shown that N_2 is positive for $\kappa = 1.0$. In suitable coordinates (given by the first step of the normal form procedure), the twist of the up torus is positive.

When the value of κ is increased to $\kappa \approx 1.3614$, both tori merge in an unique degenerate torus: the shearless torus. The most relevant coefficient of the normal form is, then, the third one, N_3 . In suitable coordinates, the shearless torus separates the phase space in a positive twist region and a negative twist region. For $\kappa > 1.3615$, there are not tori with rotation number ω .

(We just need 150 harmonics to expand all the tori in these pictures. The execution times in the computation of the normal forms are around 1m30s.)

Para terminar, citemos algunos problemas interesantes que han surgido en el contexto *non-twist*:

- Estudio de bifurcaciones de toros de dimensión maximal (tanto en dimensión 2 como superior): está relacionado con las bifurcaciones de puntos críticos de funciones.
- Problema del nopal (R. de la Llave): ¿Existe una curva invariante en una *apm non-twist* que presente meandros a todas las escalas?
- Problema del toro grueso (R. Ortega): ¿Ese toro, podría tener área positiva?