El método de la curva trasladada para localizar toros invariantes de aplicaciones y flujos no necesariamente conservativos

Amadeu Delshams

Marzo, 2003

Curvas trasladadas

Sea $\mathbb{A}$ el anillo $\mathbb{A} := \mathbb{R} \times \mathbb{T}$.

Diremos que $\Gamma = \{(r, \theta) \in \mathbb{A} : r = \psi(\theta)\}$ es una curva trasladada de una aplicación $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ cuando existe un número $\lambda \in \mathbb{R}$ (llamado *número de traslación*) tal que

$$f(\Gamma) = \Gamma - (\lambda, 0).$$

Observaciones:

- Si $\lambda = 0$, Γ es una curva invariante de f.
- Si f es simpléctica exacta, $\lambda = 0$ y por tanto toda curva trasladada es invariante.
- Si $f(r, \theta) = (r + \lambda, \theta + \omega(r))$ con $\lambda \neq 0$, no existen curvas invariantes.

Prueba alternativa del teorema del twist

Sea $f_0(r,\theta) = (r_1,\theta_1) = (r,\theta+\omega(r))$ una aplicación definida sobre $\mathbb{A}$ tal que $\exists r_0 \in \mathbb{R}$ de forma que la frecuencia $\alpha = \omega(r_0)/2\pi$ es *diofántica*:

$$|\alpha - p/q| \geq \delta |q|^{-\tau} \qquad \forall p/q \in \mathbb{Q}$$

y *no degenerada*: $\omega'(r_0) \neq 0$.

Queremos estudiar cuando una perturbación $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ de la forma

$$\begin{aligned} r_1 &= r + \epsilon F(r,\theta,\epsilon) \\ \theta_1 &= \theta + \omega(r) + \epsilon G(r,\theta,\epsilon) \end{aligned}$$

tiene una curva f-invariante cerca de la curva $\Gamma_0 = \{(r,\theta) : r = r_0\}$ invariante por f_0.

Cuando la perturbación f no es simpléctica, las técnicas habituales tipo KAM no sirven.

¿Qué podemos hacer? Estudiar si existen curvas trasladadas cuyo número de traslación sea nulo.

Curvas trasladadas de quasi-periodically forced maps: El teorema

Consideramos familias de aplicaciones forzadas cuasi-periódicamente. Concretamente, sea $f_\epsilon : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ la aplicación

$$\begin{cases} r_1 = r + \epsilon F(r, \theta, \epsilon) \\ \theta_1 = \theta + 2\pi\alpha \end{cases} \tag{1}$$

tal que $|\partial_\theta^{\ell_1} \partial_r^{\ell_2} F(r, \theta, \epsilon)| \le K_F$ y α es de tipo *constante*:

$$|\alpha - p/q| \ge \delta |q|^{-2} \qquad \forall p/q \in \mathbb{Q}.$$

Teorema (Delshams & Ortega) Existe $\epsilon_* = \epsilon_*(\alpha, K_F) > 0$ tal que si $0 < \epsilon < \epsilon_*$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces f_ϵ tiene una única curva trasladada

$$\Gamma_c = \{(r, \theta) : r = \psi_c(\theta)\}$$

con $\psi_c \in C^1(\mathbb{T})$ tal que

$$c = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_c(\theta)\, \mathrm{d}\theta.$$

Además, $(c, \theta) \mapsto \psi_c(\theta)$ es $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$.

Curvas trasladadas de quasi-periodically forced maps: Observaciones

1. Se cumplen las siguientes aproximaciones uniformes en el ángulo $\theta \in \mathbb{T}$:

$$\psi_c(\theta) = c + \mathrm{O}(\epsilon) \qquad \mathrm{d}\psi_c(\theta) = \mathrm{O}(\epsilon).$$

2. El número de traslación de la curva Γ_c es $\lambda_c = -\epsilon\Phi(c)$, donde Φ es la función

$$\Phi(c) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\psi_c(\theta), \theta, 0)\,\mathrm{d}\theta.$$

Por tanto, Γ_c es invariante $\Leftrightarrow \Phi(c) = 0$.

3. Si la curva Γ_c es invariante, su exponente de Liapounov es

$$\begin{aligned} \chi^+(c) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log(1 + \epsilon\partial_r F(\psi_c(\theta)\theta, \epsilon))\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\epsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi} \partial_r F(\psi_c(\theta)\theta, \epsilon)\,\mathrm{d}\theta + \mathrm{O}(\epsilon^2) \\ &= \epsilon\Phi'(c) + \mathrm{O}(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Curvas trasladadas de quasi-periodically forced maps: Corolarios

a) Cada cero simple $c_* \in \mathbb{R}$ de

$$\Phi_0(c) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(c,\theta,0)\,\mathrm{d}\theta$$

da lugar, para ϵ suficientemente pequeño, a una única curva invariante hiperbólica de f_ϵ, cuyo exponente de Liapounov es

$$\chi^+ = \epsilon\Phi_0'(c_*) + \mathrm{O}(\epsilon^2).$$

b) Los ceros múltiples de Φ_0 de orden impar dan lugar también, para ϵ suficientemente pequeño, a curvas invariantes de f_ϵ, aunque la unicidad y la hiperbolicidad no tienen porqué darse.

c) Si $F(r,\theta,\epsilon)$ depende de parámetros, se obtienen también las bifurcaciones de las curvas invariantes.

Curvas trasladadas de quasi-periodically forced maps: Un ejemplo

El ejemplo más común de "quasi-periodically forced map" es el *"quasi-periodically forced circle map"* $(x, \theta) \mapsto (x_1, \theta_1)$ dado por

$$\begin{cases} x_1 &= x + \omega + k \sin x + b \sin \theta \\ \theta_1 &= \theta + 2\pi\alpha \end{cases} \tag{2}$$

donde $k = \epsilon$, $\omega = \sum_{j \geq 1} \omega_j \epsilon^j$ y $b = \sum_{j \geq 0} b_j \epsilon^j$.

Si g_0 es una constante adecuada y

$$G_0(\theta) = g_0 - \frac{b_0}{2 \sin \pi\alpha} \cos(\theta - \pi\alpha)$$

el cambio $x = r + G_0(\theta)$ transforma (2) en (1) siendo el término perturbativo

$$F(r, \theta, \epsilon) = \omega_1 + \sin(r + G_0(\theta)) + b_1 \sin \theta + O(\epsilon).$$

Así pues, los resultados previos se pueden aplicar en este ejemplo.

Formas pseudo-normales de S-C o S-F: El problema

Queremos calcular formas pseudo-normales entorno el punto de equilibrio $X = 0$ de los sistemas analíticos tetra-dimensionales

$$\dot{X} = F(X) = \Lambda X + \widehat{F}(X)$$

tales que $\widehat{F}(0) = D\widehat{F}(0) = 0$ y el punto de equilibrio es un *silla-foco (S-F)* o un *silla-centro (S-C)*. (A partir de ahora, el sombrero denota términos de orden dos o superior.)

Con estas hipótesis, los VAPs de Λ son

- *Caso S-F:* $\{\pm\lambda \pm \mathrm{i}\alpha\}$, o
- *Caso S-C:* $\{\pm\lambda, \pm\mathrm{i}\alpha\}$

donde λ y α son reales no nulos.

Formas pseudo-normales de S-C o S-F: El teorema

Sea $I = (I_1, I_2)$ con $I_1 = \xi\eta$ y

$$I_2 = \begin{cases} \mu\nu & \text{en el caso S-F} \\ \mu^2 + \nu^2 & \text{en el caso S-C} \end{cases}$$

Teorema (Delshams & Lázaro) Existe una *transformación* analítica

$$X = \Phi(Y) = Y + \widehat{\Phi}(Y)$$

una *forma pseudo-normal* analítica

$$N = \begin{cases} (\xi n_1(I), -\eta n_1(I), \mu n_2(I), -\nu n_2(I)) & \text{si S-F} \\ (\xi n_1(I), -\eta n_1(I), \nu n_2(I), -\mu n_2(I)) & \text{si S-C} \end{cases}$$

y un *residuo* analítico

$$\widehat{B} = \begin{cases} (\xi b_1(I), \eta b_1(I), \mu b_2(I), \nu b_2(I)) & \text{si S-F} \\ (\xi b_1(I), \eta b_1(I), \nu b_2(I), \mu b_2(I)) & \text{si S-C} \end{cases}$$

tales que

$$D\Phi \cdot N + \widehat{B} = F \circ \Phi.$$

Formas pseudo-normales de S-C o S-F: Corolarios

C1 (Teorema de Liapounov & Moser) El sistema es hamiltoniano sii $\widehat{B} = 0$ (y en tal caso, N es la *forma normal de Birkhoff*).

El sistema $\dot{X} = F(X)$ es *reversible* cuando existe un difeomorfismo involutivo G (o sea, $G^2 = \mathrm{Id} \neq G$) tal que $\dot{X} = F(X)$ es invariante bajo el cambio $(X, t) \mapsto (G(X), -t)$.

C2 $\dot{X} = F(X)$ es reversible $\Leftrightarrow \widehat{B} = 0$.

C3 En el caso S-C, cada cero de la función

$$I_2 \mapsto b_2(0, I_2)$$

da lugar a una órbita periódica hiperbólica.

Formas pseudo-normales de S-C o S-F: Corolarios (bis)

C4 Dado el sistema plano

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = F_c \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha p + \widehat{f}_3(q,p) \\ -\alpha q + \widehat{f}_4(q,p) \end{pmatrix} \qquad (3)$$

existe una transformación analítica

$$(q,p) = \Phi(\mu,\nu)$$

tal que $D\Phi \cdot N + \widehat{B} = F_c \circ \Phi$ donde

$$N = \begin{pmatrix} \nu n(I_2) \\ -\mu n(I_2) \end{pmatrix} \qquad \widehat{B} = \begin{pmatrix} \nu\beta(I_2) \\ \mu\beta(I_2) \end{pmatrix}.$$

En particular, el sistema (3) es localmente hamiltoniano sii el origen es un centro sii $\beta(I_2) \equiv 0$.

En el caso no hamiltoniano, cada cero aislado de $\beta(I_2)$ da lugar a un ciclo límite y como $\beta(I_2)$ es analítica se puede acotar el número de ciclos límite locales.