La aplicación Estándar de Chirikov

$$SM_\varepsilon : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \qquad \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$$

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \xrightarrow{SM_\varepsilon} \begin{pmatrix} q + p + \varepsilon \sin q \quad (\text{mod } 2\pi) \\ p + \varepsilon \sin q \end{pmatrix}$$

- Ejemplo paradigmático de aplicación 2-D no integrable (obtenida discretizando la ecuación del péndulo).

- Aplicación *simpléctica exacta respecto* a la 2-forma $dq \wedge dp$.

- Ejemplo clásico para ilustrar el **Teorema KAM** para la persistencia de curvas invariantes de aplicaciones.

Caso no perturbado: $\varepsilon = 0$

- SM_0 es un *twist integrable*:

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \xrightarrow{SM_0} \begin{pmatrix} q+p \\ p \end{pmatrix}$$

- $\forall p_0 \in \mathbb{R}$ circunferencia $\mathbb{S}^1 \times \{p_0\}$ es invariante por SM_0. La dinámica de $SM_{0|\mathbb{S}^1 \times \{p_0\}}$ es una *rotación rígida* de ángulo (*frecuencia*) $\omega \equiv p_0$, i.e. *número de rotación* $\frac{2\pi}{p_0}$.

- Se cumple la "condición twist".

- Si $\frac{p_0}{2\pi}\frac{P}{Q} \in \mathbb{Q}$ todas las órbitas en $\mathbb{S}^1 \times \{p_0\}$ son Q periódicas.

- Si $\frac{p_0}{2\pi}\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, la dinámica sobre $\mathbb{S}^1 \times \{p_0\}$ es casi-periódica y todas las órbitas son densas.

Caso $\varepsilon \neq 0$

- Si $\frac{p_0}{2\pi} \in \mathbb{Q}$ la curva invariante $\mathbb{S}^1 \times \{p_0\}$ desaparece.

- Si $\frac{p_0}{2\pi} \in \mathbb{Q}$ la curva invariante $\mathbb{S}^1 \times \{p_0\}$ o bien se rompe o bien persiste (deformada) en base a dos factores:
  - Las propiedades aritméticas de la frecuencia.
  - El tamaño de la perturbación.

KAM para la aplicación estándar

Teorema: Si $\omega \in \mathbb{R}$ verifica una *condición diofantina*

$$\left| k\frac{\omega}{2\pi} - m \right| \geq \frac{c}{|k|^\tau}, \qquad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \qquad m \in \mathbb{Z},$$

para ciertos $c > 0$ y $\tau > 0$, entonces la circunferencia invariante de frecuencia ω de SM_0 persiste si ε es suficientemente pequeño, ligeramente deformada $\mathcal{O}(\varepsilon)$, en forma de una curva invariante de SM_ε cuya dinámica es analíticamente conjugada a una rotación rígida de ángulo ω.

Comentarios:

- Si fijamos ω diofantino, entonces la curva invariante de frecuencia ω es analítica en ε.

- Si fijamos ε suficientemente pequeño, la *medida de Lebesgue* del complementario de todas las curvas invariantes de SM_ε ("región de dinámica caótica") es de $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$.

Demostración 1: transformaciones y grafos

- Fijar ω diofantino y buscar (recurrentemente) una sucesión de transformaciones $\psi_1, \psi_2, \ldots$ tales que:

$$\overline{SM}_\varepsilon := \cdots \circ \psi_2^{-1} \circ \psi_1^{-1} \circ SM_\varepsilon \circ \psi_1 \circ \psi_2 \circ \cdots$$

  tome la forma:

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{SM}_\varepsilon} \begin{pmatrix} q + \omega + a(\varepsilon, \omega) p + f(q, p; \varepsilon, \omega) \\ p + g(q, p; \varepsilon, \omega) \end{pmatrix}$$

  con $f \equiv \mathcal{O}_2(p)$, $g \equiv \mathcal{O}_1(p)$.

- $p = 0$ y $q \in \mathbb{S}^1$ es una curva invariante de $\overline{SM}_\varepsilon$ con frecuencia ω.

- La ω-curva invariante de SM_ε se obtiene como *grafo* de q: $\psi_1 \circ \psi_2 \circ \cdots (q, 0)$.

Demostración 2: parametrizaciones

- Fijar ω diofantino y buscar una *parametrización* de la curva invariante $(q,p) = (u_\varepsilon(\theta), v_\varepsilon(\theta))$, $\theta \in \mathbb{S}^1$, tal que la dinámica en θ sea la $\theta \to \theta + \omega$.

- Para la aplicación estándar esto reduce a una ecuación para $u_\varepsilon(\theta)$ (*formulación lagrangiana*):

$$u_\varepsilon(\theta+\omega) - 2u_\varepsilon(\theta) + u_\varepsilon(\theta-\omega) = \varepsilon \sin(u_\varepsilon(\theta)),$$

  ecuación que puede resolverse:

  – Desarrollando $u_\varepsilon(\theta)$ en serie de potencias respecto ε (*series de Lindstedt*):

$$u_\varepsilon(\theta) = \theta + \sum_{n\geq 1} u^{(n)}(\theta)\varepsilon^n.$$

  – Usando teoría KAM directamente sobre la ecuación.

Algunos problemas relacionados

- Rotura de curvas invariantes (*analiticidad de* $u_\varepsilon(\theta)$ *respecto* ε).
  - Existen evidencias de que la última curva que se rompe es la de número de rotación la *razón áurea*. *Técnicas de renormalización*.
- *Dominio de analiticidad de* $u_\varepsilon(\theta)$ *respecto* θ cuando $\varepsilon \to 0$.
- Utilización de herramientas geométricas en lugar de métodos KAM. Analogía con la *Dinámica Compleja*.
- Dinámica en el complementario de la región KAM. *Toros secundarios*.
- Optimalidad de las condiciones aritméticas sobre ω: *condición de Brjuno*.