Una reflexión sobre los atractores extraños no caóticos desde el papel jugado por los atractores extraños caóticos.

J.A. Rodríguez
Universidad de Oviedo

El primer concepto que se plantea y desde el que se ha desarrollado todo el cuerpo de teoría para el estudio general de la dinámica ha sido el concepto de sistema dinámico, bien continuo (flujo asociado a un campo) o discreto (iteración de un difeomorfismo). Se trata de una abstracción minimal que modela en general todo fenómeno de evolución reversible. Para procesos no reversibles se introduce el concepto de semisistema dinámico. Ejemplos de semisistemas aparecen al estudiar las ecuaciones diferenciales con retardo, ecuaciones parabólicas en derivadas parciales o las iteraciones de aplicaciones no inyectivas. Estas últimas se estudian frecuentemente en la literatura no tanto como modelos concretos (como la logística en economía o ecología) si no como una herramienta interesante en la propuesta de dinámicas en dimensión superior. Es bien conocido como a traves de la hipótesis de simetría en el atractor geométrico de Lorenz, la iteración de una familia de aplicaciones del intervalo puede explicar la complicada dinámica observada numéricamente para el campo tridimensional. También es importante subrayar como un buen despliegue de la familia cuadrática, o de una familia unimodal, permite construir una familia de difeomorfismos en dimensión dos con atractores extraños persistentes, que se traducen por suspensión a una dinámica posible en familias de campos vectoriales tridimensionales. Este es el escenario, en último término, de los atractores extraños no hiperbólicos y persistentes probados en [2],[7], [10] y [11]

Sin embargo a la hora de estudiar los fenómenos de evolución no se nos escapa la propuesta de modelos tales como los procesos estocásticos o de planteamientos mixtos como los sistemas de iteracion de funciones que se disparen en un orden aleatorio. Este podría ser un mecanismo posible de generación de conjuntos atractores autosimilares tan frecuentes en la naturaleza. Los fundamentos de lo que aquí se sugiere se pueden encontrar en [3] y [17].

Comoquiera que la propuesta de nuevos modelos donde los atractores extraños no caóticos puedan jugar un papel significativo tiene para mí, y hasta el momento, sólo un alcance especulativo, me restringiré en lo sucesivo a reflexionar sobre las principales convalidaciones que el concepto de atractor extraño ha satisfecho en el marco de una teoría coherente con la observación y la comprensión de las dinámicas del universo. Si bien cada una de estas convalidaciones no ha de tener una traducción directa al caso de los atractores extraños no caóticos, estos atractores han de satisfacer algunas condiciones que globalmente le hagan relevante en la interpretación dinámica de la realidad. En otro caso no parece que pudieran aportar demasiado a la compresión global de la dinámica.

Historia y formulación del concepto.- La complejidad dinámica que se constata frecuentemente en términos de impredicibilidad debería tener una traducción en el modelo matemático. El primero en alertar sobre propiedades de un sistema dinámico que explicaba estructuras dinámicas de extraordinaria complejidad fue Poincaré [9], al observar como tales estructuras se podían deducir de la existencia de puntos homoclínicos en la iteración de un difeomorfismo. En todo entorno de cualquier punto homoclínico transversal Smale [15] colocó su ingenio geométrico, la aplicación herradura, que mostraba la existencia de un compacto invariante Λ con una órbita densa expansiva. Ciertamente la herradura de Smale explica la existencia de modelos estructuralmente estables que presentan un devenir aleatorio, en cuanto que la dinámica asintótica de dos puntos próximos podrían tener distinto comportamiento asintótico, pero el compacto invariante Λ no es un atractor y, por consiguiente, su dinámica interna totalmente impredicible no es observable. Para evitar este inconveniente Smale diseñó la aplicación solenoide para la cual existe un compacto invariante Ω que tiene una órbita densa expansiva y, además, tiene un recinto de atracción de interior no vacío. La idea de este atractor fue usada por Ruelle y Takens [13] para sugerir que la turbulencia en fluidos podría ser debida a la presencia de atractores que, como el solenoide, fuese localmene el producto de un conjunto de Cantor y de una variedad. Ellos fueron los primeros en introducir el término atractor extraño para denominar a estos atractores. De hecho, al no imponer la existencia de una órbita densa expansiva, estaban introduciendo el concepto de atractor extraño no caótico. El concepto de atractor extraño como modelo de dinámica sensible a las condiciones iniciales (impredicibilidad) y confinada en una región acotada fue definitivamente establecido como un compacto invariante que tiene una órbita densa con exponente de Liapunov positivo (impredicibilidad) y que tiene un recinto de atracción de interior no vacío (observabilidad).

Estabilidad y persistencia.- La existencia de un recinto de atracción con interior no vacío significa que para un conjunto amplio de condiciones iniciales la dinámica inherente del atractor es observable para dicho sistema, pero ello no garantiza que dicha dinámica se mantenga para pequeñas perturbaciones del sistema. Esta persistencia de una dinámica concreta tiene que ver con el concepto de estabilidad estructural: establecida una equivalencia entre las dinámicas y una topología en el conjunto de los sitemas considerados, un sistema se dice estructuralmente estable si cualquier otro sistema en un entorno suficientemente pequeño tiene dinámica equivalente. Representaremos por Ξ al conjunto de sistemas estructuralmente estables. Todo lo que no sean sistemas estructuralmente estables consituyen el conjunto de bifuración $\mathcal{X}\backslash\Xi$. El buen conocimiento de este conjunto permitiría la comprensión de todas las transiciones dinámicas.

Es fácil comprender que la aplicación solenoide es estructuralmente estable. En realidad, su atractor es un conjunto invariante hiperbólico y es bien sabido que los atractores hiperbólicos son estructuralmente estables. Sin embargo, este no es el caso en la familia de Lorenz [6], donde para pequeñas variaciones del parámetro continúa existiendo un atractor aparentemente extraño, aunque no son equivalente. Tampoco es el caso en la familia de Hénon, donde para valores de los parámetros suficientemente próximos deja de existir el aparente atractor extraño. Por consiguiente, los supuestos atractores de Lorenz y Hénon no pueden ser hiperbólicos. Pero, ¿existen atractores extraños no hiperbólicos?. Y, en caso afirmativo, ¿en qué términos se formula ahora la persistencia?

La primera respuesta a estas cuestiones fue dada por Benedicks y Carleson en un notable trabajo [2]:

Teorema.- *Sea* $H_{a,b}(x,y) = (1 - ax^2 + y, bx)$ *la familia de Hénon y sea* $0 < c < \log 2$. *Para* b *suficientemente pequeño, existe un conjunto* $E = E(c) \subset (1,2)$ *con medida de Lebesgue positiva tal que para todo* $a \in E$ *existe un conjunto compacto invariante* Λ_a *verificando:*

a.- El conjunto estable $W^s(\Lambda_a)$ *de* Λ_a *tiene interior no vacío.*

b.- Existe $z_1 \in \Lambda_a$ *tal que*

i.- $\left\{H^n_{a,b}(z_1) : n \geq 0\right\}$ *es denso en* Λ_a

ii.- $\left\|DH^n_{a,b}(z_1)(1,0)\right\| \geq e^{cn}$ *para todo* $n \geq 0$.

Desde luego, la persistencia de tales atractores extraños no hiperbólicos sólo se puede formular ahora en términos de probabilidad positiva.

Abundancia de atractores extraños.- Los atractores extraños probados en la familia de Hénon no son un resultado aislado. De hecho, tal y como había conjeturado J. Palis, atractores de este tipo aparecen genéricamente y con probabilidad positiva al desplegar una tangencia homoclínica.

Sea f_μ una familia uniparamétrica C^∞ y genérica de difeomorfismos sobre una superficie que despliega una tangencia homoclínica. En [7] se prueba que existe $k > 0$ y $t > 0$ tales que para cualquier $b > 0$ existe una renormalización φ_a de f_μ que es de clase C^k y que verifica:

a.- $\|\varphi_a - \Psi_a\| \le k\sqrt{b}$, donde $\Psi_a(x,y) = (1 - ax^2, 0)$.

b.- Si denotamos

$$D\varphi_a(x,y) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}(a,x,y),$$

entonces:

i.- $|A| \le k$, $\sqrt{b}/k \le |B| \le k\sqrt{b}$, $\sqrt{b}/k \le |C| \le k\sqrt{b}$, $|D| \le kb^{1+t}$

$b/k \le |\det D\varphi_a| \le kb$, $\|D\varphi_a\| \le k$, $\|D\varphi_a^{-1}\| \le k/b$.

ii.- $\left\|D_{(a,x,y)}A\right\| \le k$, $\left\|D_{(a,x,y)}B\right\| \le kb^{t+1/2}$, $\left\|D_{(a,x,y)}C\right\| \le kb^{t+1/2}$

$\left\|D_{(a,x,y)}D\right\| \le kb^{t+1/2}$, $\left\|D_{(a,x,y)}(\det D\varphi_a)\right\| \le kb^{t+1}$, $\|D^2\varphi_a\| \le k$.

ii.- $\left\|D^2_{(a,x,y)}A\right\| \le kb^t$, $\left\|D^2_{(a,x,y)}B\right\| \le kb^{2t+1/2}$, $\left\|D^2_{(a,x,y)}C\right\| \le kb^{2t+1/2}$

$\left\|D^2_{(a,x,y)}D\right\| \le kb^{3t+1}$, $\left\|D^2_{(a,x,y)}(\det D\varphi_a)\right\| \le kb^{2t+1}$, $\|D^3\varphi_a\| \le k$

Las familias que como φ_a verifican las propieades (a) y (b) se dicen familias de tipo Hénon y verifican el siguiente teorema, probado también en [7]:

Teorema.- *Para b suficientemente pequeño y $0 < c < \log 2$, existe un conjunto $E = E(c,\varphi) \subset (1,2)$ que tiene medida de Lebesgue positiva y tal que φ_a tiene un atractor (o repulsor) extraños para todo $a \in E$.*

Este resultado prueba la conjetura de J. Palis y da cuenta de la complejidad dinámica que ocurre cerca de una tangencia homoclínica. Puesto que los difeomorfismos hiperbólicos no son densos, la abundancia de estas tangencias y, como consecuencia, la abundancia de atractores extraños se sigue de esta nueva conjetura de J. Palis:

Para $r \ge 1$, el conjunto $U_0 \subset Dif^r(M)$ de todos los difeomorfismos de clase C^r definidos sobre una superficie M que tienen una tangente homoclínica es denso en el conjunto $Dif^r(M)$

Una prueba de la conjetura para $r = 1$ se da en [12]

Coexistencia de atractores extraños en escenarios simples.- De acuerdo con lo que acabamos de exponer, los sistemas dinámicos que poseen atractores extraños son abundantes y ello concuerda con la frecuencia con que aparecen en el universo las dinámicas complejas. La cuestión que nos preocupa ahora es la abundancia de posibles atractores extraños para un sistema dinámico dado. (La coexistencia de atractores compitiendo es una idea propuesta frecuentemente para comprender algunos procesos biológicos.)

En el escenario más simple posible: campos vectoriales en $\mathbb{R}^3$, se pueden construir, de acuerdo con el siguiente resultado de [11], familias de campos regulares a trozos que poseen simultáneamente infinitos atractores extraños para valores del parámetro en un conjunto con probabilidad positiva.

Teorema.- *En el conjunto de los campos tridimensionales que tienen una órbita homoclínica* Γ_0 *para un punto fijo con autovalores* $\lambda > 0$ *y* $-\lambda \pm i\omega$ *verificando* $|\lambda/\omega| < 0.3319$, *existe una familia uniparamétrica* X_a *de campos regulares a trozos tal que para todo entorno* V *of* Γ_0, *se verifica:*

i) Existe un conjunto abierto P *tal que para todo* $a \in P$, *el campo vectorial* X_a *tiene infinitos atractores periódicos contenidos en* V.

ii) Existe un conjunto S *con medida de Lebesgue positiva tal que para todo* $a \in S$, *el campo vectorial* X_a *tiene infinitos atractores extraños de tipo Hénon contenidos en* V.

La familia X_a dada en este teorema no es una familia genérica. La existencia de familias genéricas con infinitos atractores (extraños o no) coexistiendo para valores del parámetro en un conjunto de medida positiva es aún una cuestión abierta, para la que J. Palis conjetura una respuesta negativa.

La facilidad con la que se pueden obtener atractores extraños no hiperbólicos en la dinámica de campos tridimensionales es evidente de la geometría que subyace en las hipótesis del teorema anterior. Con hipótesis genéricas sobre los autovalores del punto fijo λ y $-\rho \pm i\omega$ dadas en el teorema de Sil'nikov [14], es decir $\lambda > \rho > 0$ y con clase $r \geq 2$ se decude la existencia de infinitas herraduras de Smale [16], que al destruirse (o al formarse) generan tangencias homoclínicas.

Localización de atractores extraños.- Los atractores extraños de tipo Hénon han sido colocados en las proximidades de las tangencias homoclínicas que parecen ser las principales transiciones que complican la dinámica y la estructura del conjunto de bifurcación. Tal complejidad transforma la comprensión de esta estructura en una quimera: las tangencias homoclínicas no se pueden detectar analíticamente. Los únicos elementos de un sistema que pueden ser determinados son, por lo general, los puntos fijos (singularidades o puntos de equilibrio), los cuales son localmente estructuralmente estables si son hiperbólicos.

Las singularidades no hiperbólicas se estudian, en principio, atendiendo al 1-jet del campo. (Nótese que llamaremos singularidad tanto al punto fijo θ de un campo X como al germen que define X en un entorno de θ.) Según las condiciones necesarias para cancelar la parte real de alguno de los autovalores tendremos diferentes singularidades. Por otra parte, la pérdida de hiperbolicidad permite que términos de k-jets de orden superior afecten a la dinámica y de ahí que algunas condiciones sobre estos términos puedan ser relevantes. Estas condiciones se dan después de reducir el k-jet a su forma normal y definen una estratificación $G^n \supset B_1 \supset B_2 \supset ...$ sobre el conjunto G^n de los gérmenes de campos vectoriales definidos en un entorno de la singularidad. Cada B_k viene dado por k condiciones y este número es la codimension de la singularidad en B_k.

Sea $X \in B_k$ una singularidad. La estrategia para investigar las posibles dinámicas de los campos próximos a X es tomar familias X_μ de campos en $\mathcal{X}^{\,r}$ dependiendo de un parámetro $\mu \in V \subset \mathbb{R}^k$, donde V es un entorno de $0 \in \mathbb{R}^k$ y tal que $X_0 = X$. Cada una de estas familias se denomina un despliegue de X y su intersección con el conjunto $\mathcal{X}^{\,r} \setminus \Xi$ define sobre el espacio de parámetros el correspondiente diagrama de bifurcaciones. Abundan en la literatura estudios numéricos para familias concretas X_μ, con interés en aplicaciones, que tratan de describir este conjunto de bifurcaciones y de evidenciar dinámicas relevantes. La filosofía que subyace en este apartado es bien diferente y responde a un enfoque más general que pueda aportar criterios teóricos para una comprensión global de las transiciones dinámicas: se trata de encontrar la menor codimensión k tal que en cualquier despliegue genérico (con k parámetros) X_μ de $X \in B_k$ exista una determinada dinámica[1].

En [4], habíamos probado que la configuración de Sil'nikov y consecuentemente la riqueza dinámica asociada (existencia de atractores extraños no hiperbólicos y persistentes) se podía desplegar genéricamente desde la singularidad nilpotente de codimension cuatro cuyo 3-jet es C^∞ conjugado a

$$j_3(X_0) \;=\; y\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial y} + (a_{12}xy + a_{13}xz + a_{22}y^2 + a_3x^3$$

[1]Como quien navega por la jungla, se trata de considerar la estratificación $G^n \supset B_1 \supset B_2 \supset ...$ como un rio con toda una jerarquía de afluentes. Será útil conocer que partes de Ξ o de $\grave{X} \setminus \Xi$ son adyacentes a alguno de los afluentes.

$$+other\ terms\ of\ order\ three)\frac{\partial}{\partial z}$$

donde $a_{12} \neq 0$ y $a_3 \neq 0$.

Recientemente [5] hemos probado este resultado para la singularidad nilpotente de codimensión tres y cerrado así una conjetura planteada por Arneodo y otros [1] en 1985.

Teorema. *Sea X una singularidad de clase C^∞ con 3-jet C^∞ conjugado a*

$$\begin{aligned} j_3(X_0) &= y\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial y} + (a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{13}xz + a_{22}y^2 + a_3x^3 \\ &\quad +other\ terms\ of\ order\ three)\frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned}$$

Entonces las órbitas homoclínicas de Sil'nikov aparecen en todo despliegue genérico X_μ de X.

A modo de aplicación.- Consideremos el oscilador de Bonhöeffer-Van der Pol:

$$\begin{aligned} x' &= x - x^3/3 - y + I(t) \\ y' &= c(x + a - by), \end{aligned}$$

que modela el canal sodio-potasio en las fibras de Purkinge que controlan el movimiento cardiaco, bajo el efecto de un marcapasos con intensidad $I(t)$. Para los valores de interés fisiológico $a = 0.7$, $b = 0.8$ y $c = 0.1$, cuando se toma $I(t) = A\cos t$ y se representa la primera componente de la aplicación de Poincaré versus el parámetro A, se obtiene numéricamente un diagrama de bifurcaciones que muestra una dinámica compleja (cascada de duplicación de periodo,etc.) y que sugiere la presencia de atractores extraños. Un diagrama similar se obtiene también si tomamos $I(t) = A\frac{\cos t}{|\cos t|}$ (ver [8]) e incluso si se sustituye el campo por uno lineal a trozos. Esto hace más abordable la geometría del problema y tal vez la prueba de la presencia de atractores extraños. ¿Qué ocurrirá si se toma $I(t)$ como una función quasi (casi)-periódica?¿Cómo se transforman los posibles atractores extraños al perder $I(t)$ su periodicidad?

Referencias

[1] Arneodo A., Coullet P., Spiegel E., Tresser C., *Asymptotic chaos.* Physica D **14** (1985): 327-347.

[2] Benedicks M., Carleson L., *The dynamics of the Hénon maps*, Annals of Math. **133** (1991): 73-169.

[3] Hata M., *Computation of fractals as fixed points of set-theoretical dynamical systems*, Computing Methods in Appl. Sc. and Eng.,VII. Elsevier Science Publ. B.V. North Holland. R. Glowinski and J.L. Lions (Editors). INRIA 1986: 117-121.

[4] Ibáñez S., Rodríguez J.A., *Sil'nikov bifurcations in generic 4-unfolding of a codimension-4 singularity.* Journal of Differential Equations **120** (1995): 411-428.

[5] Ibáñez S., Rodríguez J.A., *Sil'nikov bifurcations in generic 3-unfolding of a codimension-3 singularity.* Preprint

[6] Lorenz E.N., *Deterministic non-periodic flow.* J. Atmos. Sci. **20** (1963): 130-141.

[7] Mora L., Viana M., *Abundance of strange attractors.* Acta Math. **171** (1993): 1-71.

[8] Pérez V., Rodríguez J.A., *Una nota sobre la transición al caos en el oscilador de Bonhöeffer-Van der Pol.* Actas XII CEDYA. Oviedo (1991).

[9] Poincaré H., *Sur lè probleme des trois corps et les équations de la dynamique.* Acta Math. **13** (1890): 1-270.

[10] Pumariño A., Rodríguez J.A., *Coexistence and persistence of strange attractors.* Lecture Notes in Math. vol. **1658** Springer (1997)

[11] Pumariño A., Rodríguez J.A., *Coexistence and persistence of infinitely many strange attractors.* Ergod. Th. & Dynam. Sys **21** (2001): 1511-1523

[12] Pujals E., Sambarino M., *Homoclinic tangencies and hyperbolicity for surface diffeomorphisms*, Annals of Math. (2) **151** n.3 (2000): 961-1023.

[13] Ruelle D., Takens F., *On the nature of turbulence.* Comm. Math. Phys. **20** (1971): 167-192 / **23** (1971): 343-344.

[14] Sil'nikov L.P., *A case of the existence of a denumerable set of periodic motions.* Sov. Math. Dokl. **6**, (1965): 163-166

[15] Smale S., *Differentiable dynamical systems.* Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967): 747-817.

[16] Tresser C., *Modèles simples de transitions vers la turbulence.* These d'Etat. Universitè de Nice. (1981).

[17] Williams R.F., *Composition of contractions.* Bol. Soc. Brasil. Mat., **2** (1971): 55-59