Toros invariantes en sistemas dinámicos discontinuos

D-Days, Salou, Marzo '03

Pedro J. Torres
Universidad de Granada

En una ecuación newtoniana $x'' + g(t,x) = 0$

con $g(t,x)$ T-periódica en t:

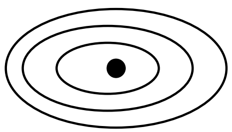
¿Para qué sirven los T.I.?

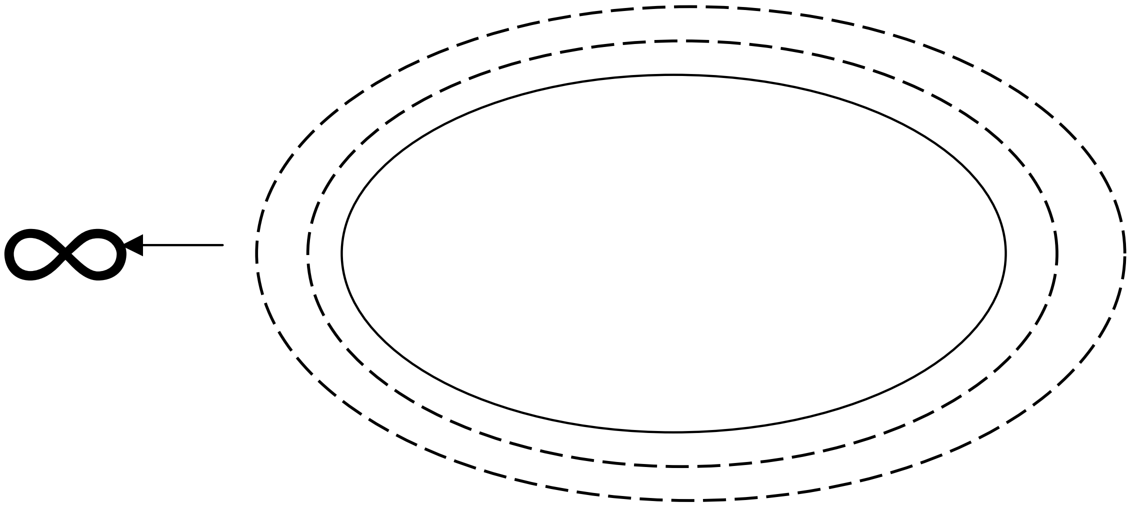
En torno a una sol. periódica

Estabilidad Lyapunov

En torno al infinito

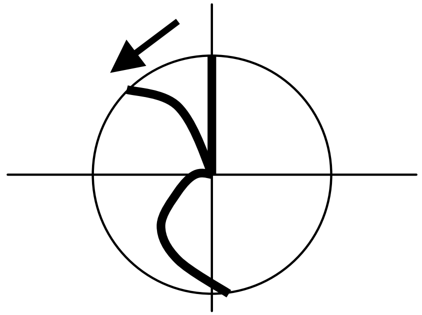
Acotación de soluciones





Herramienta clave : Teorema twist de Moser (T.T.M.)

Una aplicación twist se define como:



$$\Psi : A = S^1 \times [a,b] \to R^2$$

$$\vartheta_1 = \vartheta + w + \gamma I$$

$$I_1 = I$$

Entonces, si probamos que la aplicación de Poincaré en variables acción-ángulo es una perturbación de una aplicación twist para energías altas:

$$\vartheta_1 = \vartheta + w + \gamma I + F(\vartheta, I)$$

$$I_1 = I + G(\vartheta, I)$$

con $|F| + |G| < \varepsilon$

T.T.M.

$$\Downarrow$$

Curvas invariantes en torno a infinito

Requisito para T.T.M.: REGULARIDAD

F,G deben ser regulares, lo que se consigue asumiendo regularidad en la variable dependiente x: la aplicación de Poincaré tiene el mismo grado de regularidad que g.

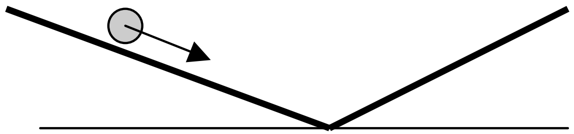
Sistemas no suaves o discontinuos surgen de forma natural en las aplicaciones. Ejemplos:

- Oscilador asimétrico: [Ortega `96,`99]

$$x'' + ax^{+} - bx^{-} = p(t)$$

- Planos inclinados y potenciales no derivables:

$$x'' + a \cdot \operatorname{sgn}(x) = p(t)$$



$$x'' + x + a \cdot \operatorname{sgn}(x) = p(t)$$

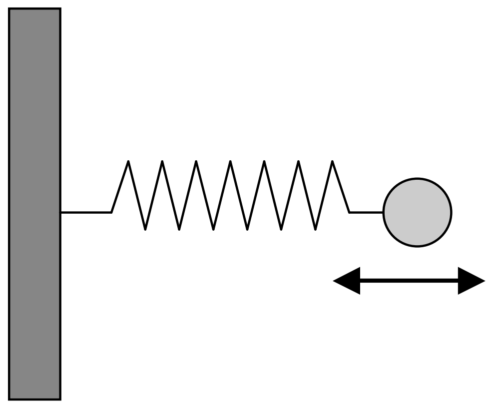
[Kunze-Kupper-You `97]

- Oscilador con impactos: [Lamba `95,Ortega ‘01]

$$x'' + ax = p(t)$$

$$x(t) \geq 0,$$

$$x(t_0) = 0 \Rightarrow x'(t_0+) = -x'(t_0-)$$



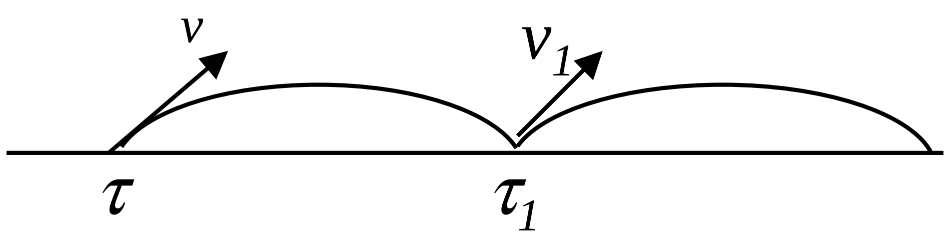
Estrategia:

Tomar otra sección del flujo distinta a la aplicación de Poincaré $\longrightarrow$ APLICACION SUCESOR

Nos centramos en el oscilador con impactos:

Dados $\tau \in \Re$, $v>0$, sea $x(t,\tau,v)$ la solución de $x''+ax=p(t)$ con $x(\tau)=0, x'(\tau)=v$. Si $\tau_1>\tau$ es el siguiente cero de x, se define $v_1=-x'(\tau_1, \tau,v)$.
Definimos la *aplicación sucesor* como:

$$S(\tau,v) = (\tau_1, v_1)$$



> *Mientras que P hereda la regularidad de g,*
> *S hereda la regularidad de p*

En [Levi `91] y [Kunze et al `97] se llega a la misma situación indirectamente mediante un cambio de variable:

$$\frac{dI}{dt} = F(t,\vartheta,I)$$

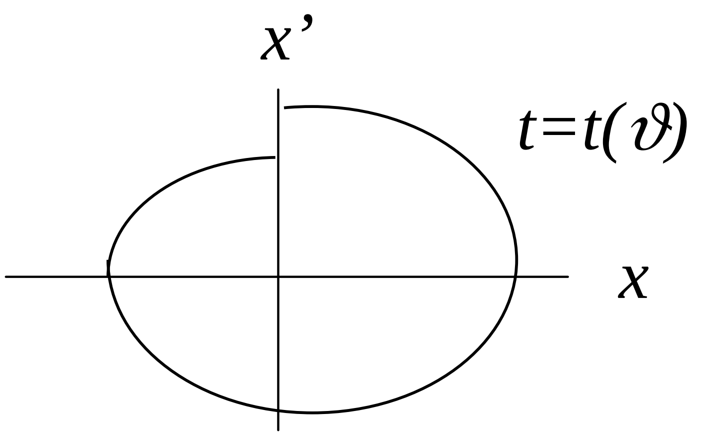
$$\frac{d\vartheta}{dt} = G(t,\vartheta,I) \neq 0 \quad \text{si} \quad I >>$$

Tomamos el ángulo ϑ como nueva variable independiente

$$\frac{dI}{d\vartheta} = \frac{F(t,\vartheta,I)}{G(t,\vartheta,I)}$$

$$\frac{dt}{d\vartheta} = \frac{1}{G(t,\vartheta,I)}$$

Para este nuevo sistema,
la aplicación de Poincaré es
la aplicación sucesor:



Relación entre ecuaciones con impactos y ecuaciones con no-linealidad discontinua

x es solución de

$$x'' + ax = p(t)\,\mathrm{sgn}(x)$$

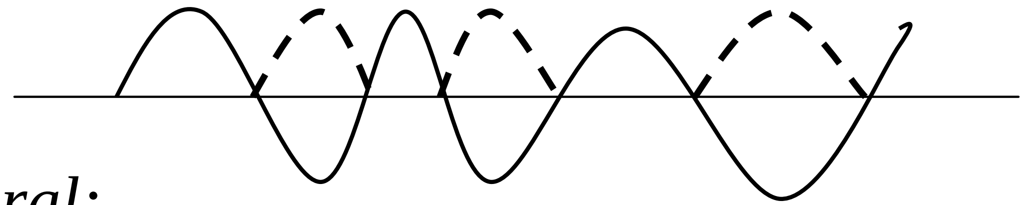
$\Leftrightarrow$

$y = |x|$ es solución de

$$x'' + ax = p(t)$$

$$x(t) \geq 0,$$

$$x(t_0) = 0 \Rightarrow x'(t_0+) = -x'(t_0-)$$



En general:

$$x'' + \mathrm{sgn}(x)\,g(t,|x|) = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$x'' + g(t,x) = 0$$

$$x(t) \geq 0,$$

$$x(t_0) = 0 \Rightarrow x'(t_0+) = -x'(t_0-)$$

Posibles elecciones	Coordenadas polares
Ortega	I=velocidad, ϑ=tiempo
Levi	I= energía, ϑ=tiempo
Kunze et al.	I=área, ϑ=tiempo

PROBLEMAS ABIERTOS:

- Acotación para las soluciones de la ecuación de Hill con obstáculo:

$$x'' + a(t)x = 0$$

$$x(t) \geq \delta > 0,$$

$$x(t_0) = \delta \Rightarrow x'(t_0+) = -x'(t_0-)$$

- Ecuaciones singulares:

$$x'' + \frac{1}{\sqrt{x}} = p(t)$$

con *p(t)<0 periódica*.

$$x'' = -\frac{1-\mu}{x^2} - \frac{\mu}{(x + p(t))^2}$$ [Corbera-Llibre]