Dinámica no lineal en dimensión baja y atractores extraños.
Salou, 13 - 15 de marzo de 2003.

DINÁMICA CASI-PERIÓDICA Y CASI-AUTOMÓRFICA.

R. Obaya. Universidad de Valladolid.

Definiciones básicas.

Sea $(X,\,\mathbb{R},\,\Phi)$ un flujo en un espacio métrico compacto. Denotamos por $\Phi_t(x) = x{\cdot}t$.

Un flujo $(X,\,\mathbb{R})$ es *casi-periódico* si para todo $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto $L(\varepsilon)$ eventualmente denso (esto es, $\mathbb{R} = L + K$ para algún compacto K) tal que $d(x{\cdot}t, x) < \varepsilon$ para todo $x \in X$, $t \in L(\varepsilon)$.

$$(X,\mathbb{R}) \text{ es casi-periódico} \Leftrightarrow \{\Phi_t \,/\, t \in \mathbb{R}\} \subset X^X \text{ es una familia equicontinua.}$$

Un punto $x \in X$ es *casi-automórfico* si de cada sucesión $\{t'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales se puede extraer una subsucesión $\alpha = \{t_{n_j}\}$ tal que $T_\alpha x$, $T_{-\alpha}\, T_\alpha x$ existen y $T_{-\alpha}\, T_\alpha x = x$ donde $-\alpha = \{-t_{n_j}\}$ y $T_\alpha = \lim_n x \cdot t_{n_j}$.

Un flujo $(X,\,\mathbb{R})$ es *casi-automórfico* si existe un punto casi-automórfico $x \in X$ con órbita $\{x{\cdot}t \,/\, t \in \mathbb{R}\}$ densa.

Se dice que un flujo minimal $(X,\mathbb{R})$ es una *extensión casi-automórfica* de un flujo minimal $(Y,\mathbb{R})$ si existe un homomorfismo de flujos $\Pi\colon X \to Y$ tal que para algún $y \in Y$ la imagen inversa $\Pi^{-1}\{y\}$ contiene un solo elemento.

$$(X,\mathbb{R}) \text{ minimal, es casi-automórfico} \Leftrightarrow \text{es una extensión casi-automórfica de un flujo minimal casi-periódico.}$$

Una función uniformemente continua $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\,\mathbb{R})$ es *casi-automórfica* si de toda sucesión $\{t'_n\}$ se puede extraer una subsucesión $\{t_n\}$ y una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(t+t_n) \mapsto g(t) \quad \text{y} \quad g(t-t_n) \mapsto f(t)$$

con convergencia puntual.

La función f es *casi-periódica* si la convergencia anterior es uniforme.

Ejemplo (de función casi-automórfica que no es casi-periódica).

La función $f(t) = 2 + \exp(i\,t) + \exp(\sqrt{2}\,i\;t)$ es casi-periódica. Su envolvente, Y, es el toro T^2 con flujo de Kronecker definido por

$$T_s(\psi_1,\;\psi_2) = \left(\psi_1 + \frac{1}{2\,\pi}\,s,\;\; \psi_2 + \frac{\sqrt{2}}{2\,\pi}\;s\right).$$

Sea $g(t) = \dfrac{f(t)}{|f(t)|}$ y $(X,\,\mathbb{R})$ el flujo definido por su envolvente. Es claro que g no es casi-periódica.

Si $\{t_n\}$ es una sucesión tal que $\{g(t+t_n)\}$ converge uniformemente sobre los compactos entonces $\{f(t+t_n)\}$ converge uniformemente. Se puede entonces definir un homomorfismo $\Pi\colon X \to Y$ con $\Pi^{-1}\{f\} = \{g\}$. No puede ser inyectivo ya que g no es casi-periódica. Además $(X,\,\mathbb{R})$ es minimal y por lo tanto es una extensión casi-automórfica del flujo casi-periódico $(Y,\mathbb{R})$.

El concepto de flujo casi-automórfico fue introducido por Bochner [BO] y estudiado de forma detallada por W. Veech [VE].

Sistemas lineales casi-periódicos 2-dimensionales.

Se considera el sistema lineal

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} a(\omega{\cdot}t) & b(\omega{\cdot}t) \\ c(\omega{\cdot}t) & -a(\omega{\cdot}t) \end{pmatrix} \mathbf{x} = A(\omega{\cdot}t)\,\mathbf{x}\,.$$

Sea $K_{\mathbb{R}} = \Omega \times P^1(\mathbb{R})$, $K_S = \Omega \times S^1$. Se define el *espectro de Sacker-Sell* como

$$\Sigma = \{\lambda \,/\, \mathbf{x}' = (A(\omega{\cdot}t) - \lambda\, Id)\, \mathbf{x} \text{ no tiene dicotomía exponencial}\}$$

Las tres posibilidades para el espectro son: $\{-\beta,\ \beta\}\,,\ [-\beta,\ \beta]\,,\ \{0\}$.
No consideramos el caso de órbitas acotadas.

Caso 1: $K_{\mathbb{R}}$ contiene dos minimales $N_1,\ N_2$.
Estos minimales son extensiones casi-automórficas de la base.

(i) Supongamos que $\Sigma = \{-\beta,\ \beta\}$.

Existe un minimal $M \subset K_S$ que es un 1-recubrimiento o un 2-recubrimiento de la base y una transformación fuerte de Perron $\mathbf{x} = U(\omega{\cdot}t)\, \mathbf{z}$ que lleva el sistema a forma diagonal,

$$\mathbf{z}' = \begin{pmatrix} d(\omega{\cdot}t) & 0 \\ 0 & -d(\omega{\cdot}t) \end{pmatrix} \mathbf{z}\,.$$

(ii) Supongamos que $\Sigma = \{0\}$.

El mismo enunciado es cierto pero, en este caso, el minimal M es casi-automórfico.

Caso 2: $K_{\mathbb{R}}$ contiene un único minimal N.
Supongamos que N contiene un par distal en la fibra, entonces $(N,\ \mathbb{R})$ es una extensión casi-automórfica de un 2-recubrimiento (no 1-recubrimiento) de la base.
Existe un minimal casi-automórfico $M \subset K_S$ y una transformación fuerte de Perron $\mathbf{x} = U(\omega{\cdot}t)\, \mathbf{z}$ que lleva el sistema a forma diagonal

$$\mathbf{z}' = \begin{pmatrix} b(\omega{\cdot}t) & 0 \\ 0 & -b(\omega{\cdot}t) \end{pmatrix} \mathbf{z}\,.$$

Si $\Sigma = [-\beta,\ \beta]$ entonces $K_{\mathbb{R}}$ contiene un único minimal N que es una extensión proximal de la base.
Cuestión abierta: ¿Es casi-automórfica?
Si $(M,\ \mathbb{R})$ es un 1-recubrimiento de $(N,\ \mathbb{R})$ existen respuestas parciales basadas en el conjunto $P(M)$ de puntos proximales.
No reducibilidad es genérico (en algunos casos importantes).
Sea $(\Omega,\ \mathbb{R})$ casi-periódico pero no periódico.
Si $A(\omega) = A$ es constante el flujo no puede ser recurrente y proximal simultáneamente.
Sea $\mathcal{C}_0 = \{b \in \mathcal{C}(\Omega) \,/\, \int_\Omega b(\omega)\, dm_0 = 0\}$ y $\mathcal{P}(\Omega)$ el conjunto de transformaciones fuertes de Perron con determinante uno. Denotamos

$$\begin{aligned} S_0 \;=\; & \Big\{A \in \mathcal{C}(\Omega,\, L(\mathbb{R}^2)) \;\;/\;\; A(\omega) = P^{-1}(\omega) \begin{pmatrix} a(\omega) & 0 \\ b(\omega) & -a(\omega) \end{pmatrix} P(\omega) - P^{-1}(\omega)\, P'(\omega) \\ & \qquad\qquad \text{para } P \in \mathcal{P}(\Omega),\ a \in \mathcal{C}_0(\Omega),\ b \in \mathcal{C}(\Omega)\Big\}\,, \end{aligned}$$

$$S_0^* = \Big\{A \in \mathcal{C}(\Omega,\, L(\mathbb{R}^2)) \text{ con tr}A = 0 \,/\, \text{todas las soluciones de } \mathbf{z}' = A(\omega{\cdot}t)\, \mathbf{z} \text{ son acotadas}\Big\}\,.$$

Entonces $S = \operatorname{cls}(S_0) = \operatorname{cls}(S_0^*)$.
Existe un conjunto residual $R \subset S$ tal que si $A \in R$ entonces $(K_{\mathbb{R}},\ \Phi)$ es minimal y únicamente ergódico con una única medida concentrada en una lámina ergódica. En particular, $K_{\mathbb{R}}$ es minimal y proximal.

Dinámica casi-automórfica en ecuaciones semilineales parabólicas.

Consideremos la familia de problemas parabólicos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,\, x,\, u(x),\, u_x(x))\,, & \qquad f \in \Omega = H(f_0)\,, \\ u(0,x) = u_0(x)\,, \\ u(t,0) = u(t,1) = 0\,, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,1) = 0\,. \end{cases}$$

La condición inicial no pertenece a un espacio X^α con $1/2 \leq \alpha < 1$. Suponemos que $u(t,x)$ es una solución que existe para todo $t > 0$ y que $\{u(t,\ \cdot)\,/\,t > 0\} \subset X^\alpha$ es precompacta.

Se pretende describir el conjunto ω-límite, K, de esta solución.

Shen y Yi [SE-YI] prueban que, como máximo, existen dos minimales $N_1,\, N_2 \subset K$ que son extensiones casi-automórficas de la base.

Se define un orden en $\Pi^{-1}(g)$ basado en el número de raíces en $[0,1]$ que es total y que se conserva por el flujo. Ideas de Matano, Angenert,...

Esto es una conexión con la teoría no-autónoma de sistemas monótonos.

Semiflujos fuertemente monótonos. Separación continua.

Consideremos un semiflujo de tipo skew-product

$$\begin{array}{rcl} \tau\colon \mathbb{R}^+ \times \Omega \times X & \to & \Omega \times X \\ (t,\, \omega,\, x) & \mapsto & (\omega{\cdot}t,\ u(t,\omega,x)) \end{array}$$

donde X es un espacio de Banach fuertemente ordenado con cono positivo normal, X_+, (minihedral).

El semiflujo es *fuertemente monótono* si es monótono y $u_x(t,\omega,x)\,v >> 0$ cuando $v > 0$, $t \geq t_0$.

En este caso admite una *separación continua*, es decir, subespacios $\{X_1(\omega,x)\}$, $\{X_2(\omega,x)\}$ tales que

1. $X = X_1(\omega,x) \oplus X_2(\omega,x)$,
2. $X_1(\omega,x) = < v(\omega,x) >$ con $v(\omega,x) >> 0$, $||v(\omega,x)|| = 1$,
3. $X_2(\omega,x) \cap X_+ = \{0\}$ para todo $(\omega,x) \in K$,
4. para todo $t > 0$, $(\omega,x) \in K$,
$$\begin{aligned} u_x(t,\omega,x)\, X_1(\omega,x) &= X_1(\tau(t,\omega,x)) \\ u_x(t,\omega,x)\, X_2(\omega,x) &\subset X_2(\tau(t,\omega,x))\,, \end{aligned}$$
5. existen constantes $c > 0$, $\delta > 0$ tales que para todo $(\omega,x) \in K$, $z \in X_2(\omega,x)$ con $||z|| = 1$ y $t > 0$ se verifica
$$||u_x(t,\omega,x)\, z|| \leq c\, e^{-\delta t}\, ||u_x(t,\omega,x)\, v(\omega,x)||\,.$$

Semiflujos monótonos generados por ecuaciones con retardo.

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$x' = f(t,\, x(t),\, x(t-1))$$

que genera una familia de ecuaciones en su envolvente.

El sistema es

- *cooperativo* $\iff$ $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(t,x,y) \geq 0\,, \quad x,\, y \in \mathbb{R}^n,\, t \in \mathbb{R},\; i \neq j.$

- *fuertemente irreducible* con respecto a x si existe $\delta_0 > 0$ tal que si dos subconjuntos de índices I, J forman una partición de $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ entonces para cada x, $y \in \mathbb{R}^n$ existen $i \in I$, $j \in N - I$ con
$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t,x,y) \right| \geq \delta_0\,.$$

- *fuertemente monótono* con respecto a $x(t-1)$ si existe $\delta > 0$ tal que
$$\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(t,x,y) \geq \delta \quad \text{para todo } x,\, y \in \mathbb{R}^n,\;\; t \in \mathbb{R},\;\; i,\, j = 1, \ldots, n\,.$$

En estas condiciones el flujo que define la ecuación con retardo en $\Omega \times \mathcal{C}([-1,0])$ es (eventualmente) fuertemente monótono.

Bibliografía:

[BO] S. Bochner "A new aproach to almost periodicity". *Proc. Nat. Academy Sci. USA* **48** (1962).

[SE-YI] W. Shen & Y. Yi "Dynamics of almost periodic scalar parabolic equations". *J. Differential Equations* **122** (1995) 1124-136.

[VE] W.A. Veech "Topological dynamics". *Bull. A.M.S.***83** (1977) 775-830.