Dinámica no lineal en dimensión baja y atractores extraños.
Salou, 13 - 15 de marzo de 2003.

¿HAY UNA ALTERNATIVA DE FREDHOLM PARA LAS ECUACIONES CASI-PERIÓDICAS?.

R. Ortega. Universidad de Granada.

Se considera la ecuación diferencial escalar

$$x' = a(t)\,x + b(t)$$

con $a(t)$, $b(t) \in AP$, es decir, funciones casi-periódicas.
Recordemos que una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *casi-periódica* si para todo $\varepsilon > 0$ existen $A_1, \ldots A_n \in \mathbb{C}$, $\omega_1, \ldots \omega_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\left| f(t) - \sum_1^n A_j\, e^{i\omega_j t} \right| < \varepsilon \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R}\,.$$

Un importante resultado de Favard establece que, para ciertos sistemas diferenciales lineales casi-periódicos, la existencia de una solución acotada implica la existencia de una solución casi-periódica. En concreto, si se representa por $\bar{a}$ el promedio

$$\bar{a} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\,T} \int_{-T}^{T} a(s)\,ds\,,$$

Favard demuestra, (véase [FA]), que

Caso 1: Si $\bar{a} \neq 0$ entonces, para toda $b \in AP$ existe una única solución $x \in AP$.

Caso 2: Si Si $\bar{a} = 0$ y $A(t) = \int_0^t a(s)\,ds$ está acotada, entonces

existe una solución en $AP \Leftrightarrow$ existe una solución en $L^\infty(\mathbb{R})$ (acotada).

La cuestión ahora es: ¿Qué ocurre si $\bar{a} = 0$ y $\sup_t |A(t)| = \sup_t \left|\int_0^t a(s)\,ds\right| = \infty$?
Una respuesta parcial a esa pregunta puede encontrarse en los artículos de Zhikov y Levitan [ZH-LE] y [LE-ZH], y en el artículo de Johnson [JO]. En ambos casos los autores construyen ejemplos de ecuaciones lineales escalares con todas las soluciones acotadas, pero ninguna casi-periódica.
El ejemplo de Zhikov y Levitan trata con funciones cuasi-periódicas con dos frecuencias. La función $a(t)$ se toma de un ejemplo de Bohr; verifica ciertas condiciones de simetría, y su primitiva $A(t)$ es tal que

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{A(t)}{|t|^{1/2}} = -\infty\,.$$

En el ejemplo de Johnson $a(t)$ y $b(t)$ son límite uniforme de funciones periódicas. La función $a(t)$ se toma de un ejemplo de Conley y Miller (véase [CO-MI]) y, entre otras propiedades, su primitiva $A(t) \to -\infty$ cuando $|t| \to \infty$.

En ambos ejemplos $\varphi(t) = \exp(A(t))$ es una solución de la ecuación homogénea que toma valores arbitrariamente pequeños, de hecho $\varphi(t)$ es homoclina a cero en el sentido de que $\varphi(t) \to 0$ cuando $|t| \to \infty$. Ortega y Tarallo, en [OR-TA], demuestran que, cuando tiene lugar este tipo de decrecimiento, el resultado de Favard no es cierto, es decir,

"dada $a \in AP$, con $\bar{a} = 0$, y $A(t) \to -\infty$ si $|t| \to \infty$,

existe $b \in AP$ tal que $\exists$ soluciones en $L^\infty(\mathbb{R})$ pero no en AP".

Este punto de vista unifica las situaciones presentes en [ZH-LE] y [JO].

Cuestiones abiertas:

1. ¿Qué se puede decir de la clase $\mathcal{A} : a \in AP$, $\bar{a} = 0$, $A(t) \to -\infty$ si $|t| \to \infty$?

   Se dice que una función está en AP^∞ si es de clase $\mathcal{C}^\infty$ y ella, y todas sus derivadas, son casi-periódicas.

   Ortega y Tarallo ([OR-TA]) construyen un ejemplo de una ecuación con coeficientes, $a(t) \in \mathcal{A}$,

$$a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \operatorname{sen}(b^n t) \qquad 0 < a < b < 1\,.$$

   tales que $a(t) \in AP^\infty$.

2. Regularidad. ¿Existe $A \in C^\omega(\Pi^2)$, $\bar{A} = 0$, $a(t) = A(\omega_1 t, \omega_2 t)$, $a \in \mathcal{A}$?

   Obsérvese que, de existir una función de ese tipo, ω_1/ω_2 tiene mala aritmética (el vector (ω_1, ω_2) no puede ser diofántico ya que, en ese caso, la primitiva estaría acotada).

Bibliografía:

[CO-MI] C.C. Conley & R. K. Miller "Assymtotic stability without uniform stability: almost-periodic coefficients". *J. Diff. Eq.* **1** (1965) 333-336.

[FA] J. Favard "Sur les equations différentielles linéaires à coefficients presque-périodiques". *Acta Math.* **51** (1927), 31-81.

[JO] R.A. Johnson "A linear almost-periodic equation with an almost-automorphic solution". *Proc. Am. Math. Soc.* **82** (1981), 199-205.

[LE-ZH] B. M. Levitan & V.V. Zhikov "Almost-periodic functions and differential equations". *Cambr. Univ. Press.* 1982.

[OR-TA] R. Ortega & M. Tarallo "Almost-periodic differential equations with non-separated solutions".

[ZH-LE] V.V. Zhikov & B. M. Levitan "Favard theory" *Russian Math. Surveys* **32** (1977), 129-180.