

PROBLEMAS

- DIAGRAMAS DE BIFURCACIÓN

- NÚMERO MÁXIMO DE CICLOS LÍMITE

 - UNICIDAD

 - NUM. EXACTO

 - ≤ 2

- PROBLEMAS DE HILBERT

 - INTEGRALES ABELIANAS

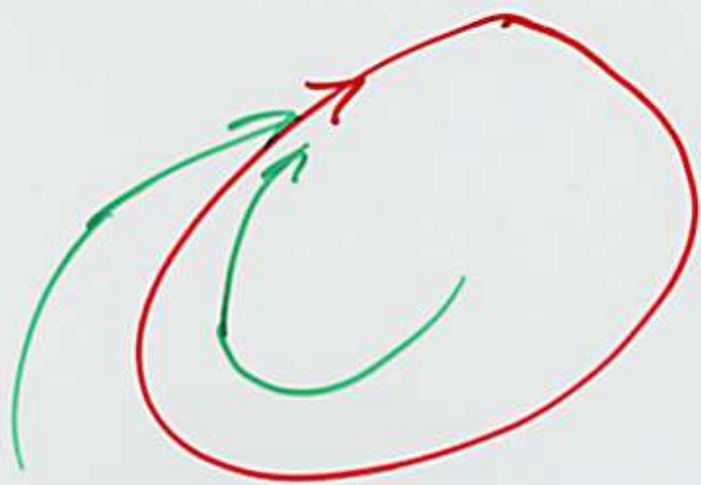
 - COTAS INFERIORES NUM. C.L.

 - EXTENSIONES PROB. DÉBIL HILB.

- TRANSFORMACIONES

 - ECUACIONES DE ABEL

CICLO LÍMITE para EDO autónomas
en el plano



(ORBITA PERIÓDICA AISLADA)

2 DIAGRAMAS DE BIFURCACION

Dumortier & Fiedelaers TAMS 1991

En sistemas cuadráticos se encuentra

NILPOTENT ELIPTIC POINT BIF. OF COD. 3

$$\begin{cases} x' = y + x^2 + 2xy \\ y' = a + bx + cy + (c-b)x^2 + xy \end{cases}$$



CONTACTO FLAT ENTRE :

→ línea de LOOP HOMOLINICO

→ " de CICLO LÍMITE doble

3 NUMERO EXACTO DE CICLOS LÍMITE

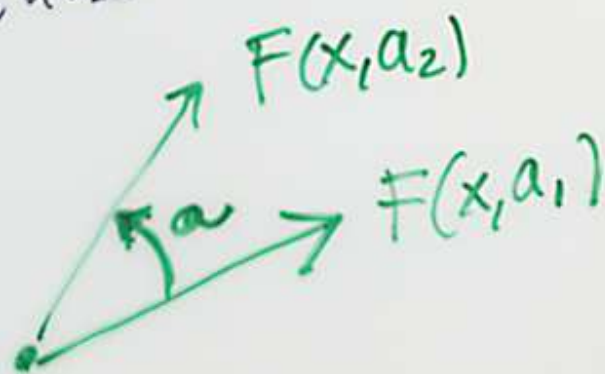
$$\dot{\vec{x}} = F(\vec{x}, a)$$

$$\begin{aligned} \vec{x} &\in \mathbb{R}^2 \\ a &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

¿Variación del número de
ciclos límite, en función del
parámetro $a \in \mathbb{R}$?

Familias más fáciles:

Familias rotatorias

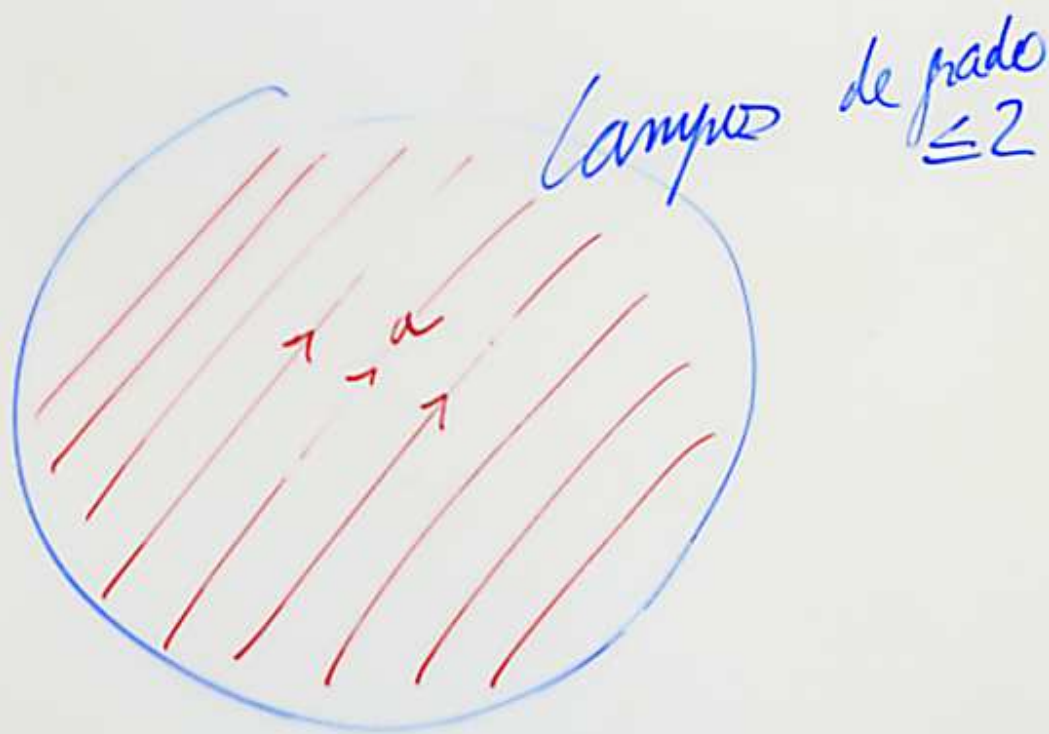


4 NO ES MUY RESTRICTIVO:

$$\begin{cases} x' = P(x, y) \\ y' = Q(x, y) \end{cases} ; P, Q \text{ grado } \leq 2$$



$$(*) \begin{cases} x' = P(x, y) \\ y' = R(x, y, a) = Q(x, y) + a P(x, y) \end{cases}$$



→ ROTATORIO RESP. a

BIF. FAMÍLIAS ROTATORIAS

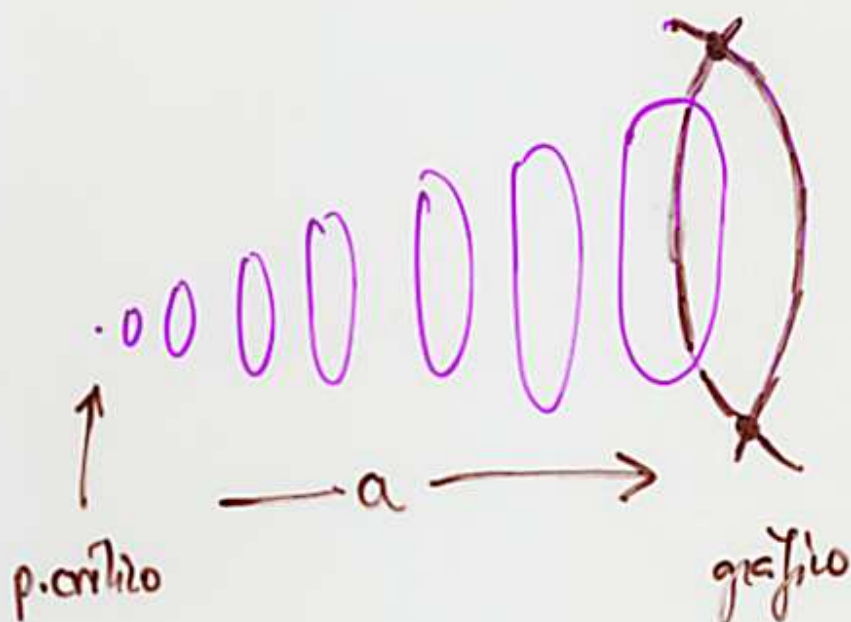
• "HOPF"



• "CÍCLO LÍMITE DOBLE"



• MOV. CÍCLO LÍMITE



γ_{a_1} ciclo limite para $a=a_1$ $\Rightarrow \gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$
 γ_{a_2} " " " $a=a_2$

6

EJEMPLO (PROBLEMA) 1:

JMAA, 222, 1998, pp. 305

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + (a - x^2)(1 + y^2)y \end{cases}$$

- Familia rotatoria

- ≤ 1 ciclo límite

- Num ciclos límite



$$a^* < \sqrt[3]{\frac{9\pi}{16}} \simeq 1.7707..$$

6.6. $a^* < \frac{3}{2} \left(\frac{\pi}{4} \right)^{2/3} \simeq 1.27..$

Númericamente: $a^* \simeq 0.6467$

7

EJEMPLO (PROBLEMA) 2:

G.G. 2003

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x^3 - ax^2y + y^3 \end{cases}$$

• Familia rotatoria

• ≤ 1 ciclo límite? (ABIERTO)



G.G.

$$a^* < 2.67 \dots$$

(cero func. trascendente)

Numericamente: $a^* \simeq 2.198 \dots$

PROBLEMA GENERAL

HIP.

- $\dot{x} = F(x, a) \quad x \in \mathbb{R}^2$
- Familia rotatoria en $a \in \mathbb{R}$
- Num ciclos límite ≤ 1

Entonces



Dar métodos para determinar
(o acotar) a^* .

9

PROBLEMA DE UNICIDAD + FAMOSO

Liénard

$$\begin{cases} x' = -y + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 \\ y' = x \end{cases}$$

¿ Máximo número de ciclos límite 1?

Es el caso mas sencillo de la Conjetura
Lins-Melo-Pugh

$$\begin{cases} x' = -y + F_n(x) \\ y' = x \end{cases}$$

F polinomio de grado n

¿ Máx núm. ciclos límite $\left[\frac{n-1}{2} \right]$?

PROBLEMAS ABIERTOS:

SISTEMAS CON $(\leq 2 \text{ ??})$

CÍCLOS LÍMITE

$$\begin{cases} x' = -y + ax \\ y' = x^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \end{cases}$$

C.G.M.

BOUNDED QUADRATIC SYSTEMS

Dickson, Perko JDE 1970

Dumortier, Hirschman, Perko JDE 2000

$$\begin{cases} x' = -y + dx + lx^2 + mxy \\ y' = x(1 + x + by) \end{cases}$$

- (1) $(b-l)^2 + 4m < 0, mb < 0$
 (2) $|l| < 2, b = m + 1 = 0, l \geq d$

PROBLEMA DE HILBERT

$$(*) \begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases}$$

grado $P, Q \leq n$

Calcular o das cotas

superiores para

$$H(n) = \max \text{ num de ceros } \lim_{n \rightarrow \infty} H(n)$$

PROBLEMA DEBIL DE HILBERT

$$I(h) = \int_{H=h} R(x, y) dy - S(x, y) dx$$

R, S pol. de grado n , H pol. grado $n+1$

P: Calcular el $\max$ num de ceros de $I(h)$

RELACION:

Núm ceros simples de $I(h)$
da lugar a ciclos límite
para

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) + \varepsilon R(x, y)$$

$$\dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + \varepsilon S(x, y)$$

Prob. debil $\rightsquigarrow$

COTAS

INTERIORES

PARA

Prob. Hilbert

COTAS INFERIORES $H(n)$

Christopher & Lloyd

Proc. R Soc London A 1995

$$H(n) \geq O(n^2 \log n)$$

CONJETURA (Lloyd)

$$H(n) = O(n^3)$$

COTAS INFERIORES

$$H_{loc}(n)$$

ALREDEDOR UN
SUO PUNTO CENIZO

$$H_{loc}(n) \geq O(n^2)$$

Ejemplos

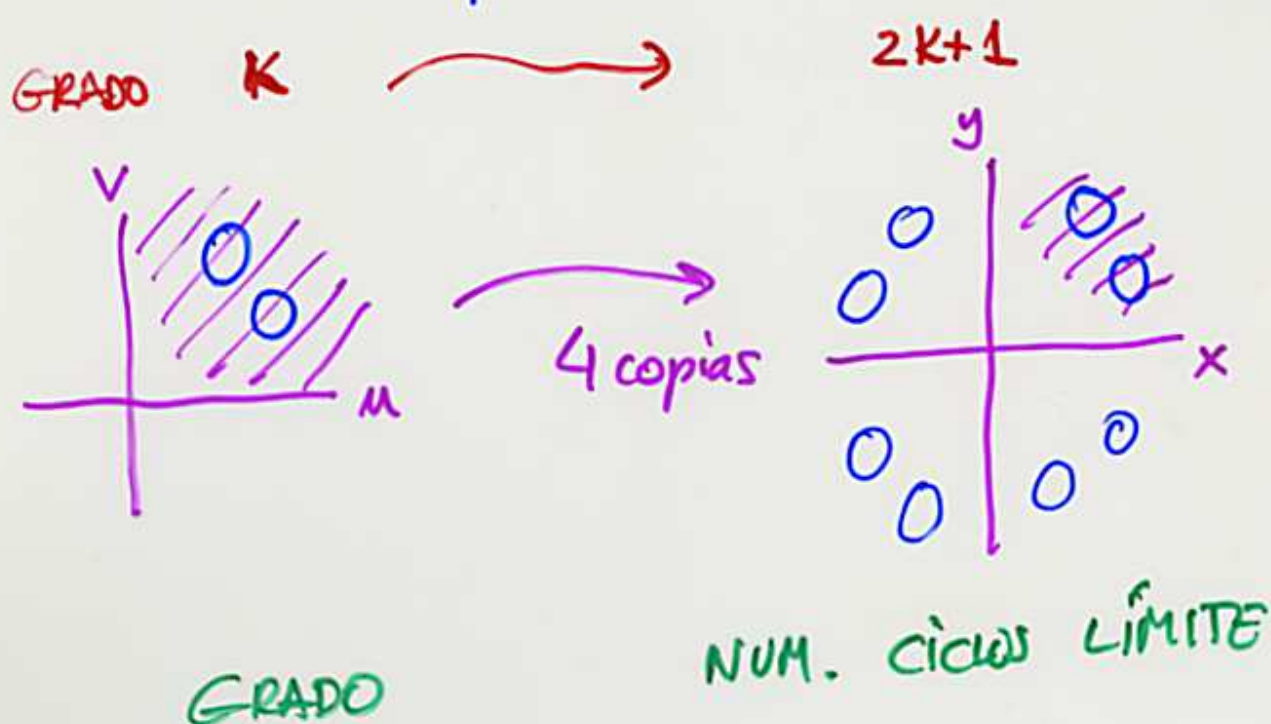
LLLZ

$$\frac{n^2}{8} + \dots$$

Il'yastenko

$$\frac{n^2}{2} + \dots$$

$$\begin{cases} \dot{u} = P(u, v) \\ \dot{v} = Q(u, v) \end{cases} \xrightarrow{x^2 = u, y^2 = v} \begin{cases} x' = y P(x^2, y^2) \\ y' = x Q(x^2, y^2) \end{cases}$$



GRADO

NUM. CILOS LÍMITE

 K $H(K)$ $2K+1$ $\geq 4 H(K)$ $2(2K+1)+1$ $\geq 4^2 H(K)$ $\vdots$ $\geq 4^l H(K)$ $2^l K + 2^{l-1} + \dots + 1$ $\geq \frac{H(K)}{(K+1)^2} (n+1)^2$ $\parallel$
 n

$$K=2, H(2) \geq 4 \rightarrow H(n) \geq \frac{4}{9} (n+1)^2$$

$$K=3, H(3) \geq 11 \rightarrow H(n) \geq \frac{11}{16} (n+1)^2$$

$$\vdots$$

Lema

a) $\dot{x} = H_y + \varepsilon R_{2l+1}(x,y)$
 $\dot{y} = -H_x + \varepsilon S_{2l+1}(x,y)$

$\nearrow$ l ciclos límite

b) Si el sistema con $\varepsilon=0$ tiene

K centros COLINEALES entonces se

pueden obtener l ciclos límite
alrededor de cada centro. En total

$$K \cdot l$$

POR TANTO A CADA PASO

$\times 4$ num ciclos límite + Sumar el num de
ciclos límite de
los centros alineados

$\downarrow$
 $n^2 \log n$

$$H_{hc}(n) \geq \frac{n^2}{8}$$

$$\begin{aligned} x' &= y + \varepsilon R_{2l+1}(x, y) \\ y' &= -x^{2l+1} + \varepsilon S_{2l+1}(x, y) \end{aligned}$$

$$I(h) = \int \left(R_{2l+1}(x, y) dy - S_{2l+1}(x, y) dx \right)$$

$$\frac{x^{2l+2}}{2l+2} + \frac{y^2}{2} = h$$

Es esencialmente un polinomio de
 grado $\frac{n^2}{8}$ (muchos términos
 se cancelan por simetría)
 $n = 2l+1$

PROB. ABIERTOS RELACIONADOS CON PROB. DEBIL DE HILBERT

1. Dar metodos para estudiar campos con continuos de orbitas periodicas que no sean hamiltonianos

$$\dot{z} = f(z) + \varepsilon g(z, \bar{z})$$

(ADMITE UN FACTOR INTEGRANTE RACIONAL)

$$\dot{x} = \text{CENTRO} + \varepsilon R(x, y)$$

$$\dot{y} = \text{REVERSIBLE} + \varepsilon S(x, y)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x^4 \\ \dot{y} &= x \end{aligned}$$

- ③ Estudiar el pres. de Hilbert para ordenes mayores que uno :

$$\begin{aligned} x' &= H_y(x, y) + \varepsilon R_1(x, y) + \varepsilon^2 R_2(x, y) + \dots + \varepsilon^k R_k \\ y' &= -H_x(x, y) + \varepsilon S_1(x, y) + \varepsilon^2 S_2(x, y) + \dots + \varepsilon^k S_k \end{aligned}$$

- Calcular expresiones de lo equivalente a $I_1(h)$

si $I_1(h) \equiv 0, \dots, I_r(h) \equiv 0$

- Ver como crece el numero de ciclos límite con k



Encontrar una expresión alternativa
a $I(h)$ que controle también
los ciclos límite que vienen

"de infinito"

o

"de la frontera del centro"

Ejemplo

J. J. J.
Math. Proc. Cambridge
2000

$$x' = y + \varepsilon y^2 + \varepsilon^3 \left[-ax + \left(x + \frac{y}{3} \right)^3 \right]$$

$$y' = -x + 3\varepsilon x^2$$

CICLO LÍMITE

$$\left(x - \frac{1}{3\varepsilon} \right)^2 + \left(y + \frac{1}{\varepsilon} \right)^2 = \frac{69}{5}$$

TRANSFORMACIÓN DE ECUACIONES DEL PLANO A ECUACIONES ESPECIALES

$$\begin{cases} x' = P(x, y) \\ y' = Q(x, y) \end{cases}$$

Liénard

(*)

Abel generalizadas

EJEMPLO MAS SIMPLE (EDO RÍGIDAS)

$$\begin{cases} x' = -y + x (P_0 + P_1(x, y) + \dots + P_k(x, y)) \\ y' = x + y (P_0 + P_1(x, y) + \dots + P_k(x, y)) \end{cases}$$

→ PARES

$$r' = P_0 + P_1(\cos\theta, \sin\theta) r + \dots + P_k(\cos\theta, \sin\theta) r^k$$

$$\theta' = 1$$

$$\frac{dr}{d\theta} = A_k(\theta) r^k + A_{k-1}(\theta) r^{k-1} + \dots + A_1(\theta) r + A_0(\theta)$$

EQUACIONES DE ABEL

$$(*) \begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = A(\theta)r^3 + B(\theta)r^2 + C(\theta)r + D(\theta) \\ r(0) = r(2\pi) \end{cases}$$

Th. (Lins 1980 Inv. Math.)

$\forall l \quad \exists A, B$ pul. trigonométricos
y $C \equiv D \equiv 0$ tal que $(*)$
tiene al menos l ciclos límite.

PROBLEMA

Dar cotas de l en términos de
los grados de A y B .

- Il'yashenko Nonlin. 2000 en términos $\max |A|$
 $\max |B|$

EQUAÇÕES SURPREENDENTES:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dr}{d\theta} = r^n + B(\theta)r^2 + C(\theta)r + D(\theta) \\ r(0) = r(2\pi) \end{array} \right.$$

Thm (Pao 98, GG 04)

n IMPAR $\Rightarrow$ Num. ciclos limite ≤ 3

$n = 4 \Rightarrow \forall l, \exists (*)$ com l ciclos

$n = 2k, k > 2$???

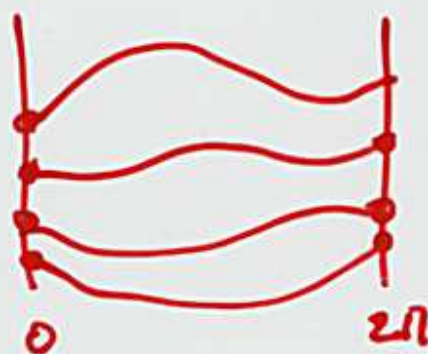
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dr}{d\theta} = r^n + A_m(\theta)r^m + A_q(\theta)r^q \\ r(0) = r(2\pi) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} n > m > q \\ n > 3 \end{array}$$

$q = 1 \Rightarrow$ Num. ciclos limite ≤ 5

$q = 2 \Rightarrow \forall l, \exists (*)$ com l ciclos limite

$$\frac{dr}{d\theta} = \epsilon f(\theta) r^3 + B(\theta) r^2$$

$\epsilon = 0 \Rightarrow$ CENTRO



Solución

$$\varphi_0(\theta; x) = \frac{x}{1 - x \tilde{B}(\theta)}; \quad \tilde{B}(\theta) = \int_0^\theta B(\theta) d\theta$$

$$\varphi(\epsilon, \theta; x) = \varphi_0(\theta; x) + \epsilon W(\theta; x) + O(\epsilon^2)$$

$$W(2\pi; x) = x^3 \int_0^{2\pi} \frac{f(t)}{1 - x \tilde{B}(t)} dt$$

$$\frac{W(2\pi; x)}{x^3} = P_\ell(x) + O(x^{\ell+1})$$

$\forall P_\ell$ existe f polinomio trigonométrico