

¿ Porqué estudiar
sistemas lineales
a trozos ?

(Why nonsmooth dynamics ?)

Top Manga, 2004

* Pedigri

* Didacticos

* Estructura

→ En el principio era ... Poincaré

"Sur les courbes définies par les équations différentielles" (1881, 1882, 1885, 1886)

→ Henri Léauté : "Sur les oscillations à longues périodes dans les machines activées par des moteurs hydrauliques et sur les moyens de prévenir ces oscillations" (1885)

* Un problema de ingeniería de control,
i modelado como un sistema a trozos y discontinuo ! ; ii construye el plano de fases y obtiene ciclos límites !!

→ Andronov y la escuela rusa:

- motivados por investigación básica de circuitos de radio → oscilaciones automantenidas corresponden a ciclos límites
- "Teoría de osciladores" (1937) → libro seminal
- Andronov y Pontriaguin (1937) → estabilidad estructural

→ Levinson (1949): estudio de la dinámica del oscilador de Van der Pol forzado periódicamente, modelado mediante un sistema lineal a trozos; clarifica el extenso trabajo de M. Cartwright y J.L. Littlewood durante la II Guerra Mundial.

* Diez años más tarde Smale publica un artículo donde conjetura que "el caos no existe"

* En 1960 Levinson le escribe a Smale, a la sazón en Río de Janeiro, apuntándole un contraejemplo contenido en su trabajo del año 49.

* Smale: "...trabajé día y noche..." y "...descubrí la hemadura!", "...sobre las playas de Río..."

CASO MAS SIMPLE :

SISTEMAS PLANOS con 2 ZONAS

$$\begin{array}{c|c} A_- & A_+ \\ \hline x=0 \end{array}$$

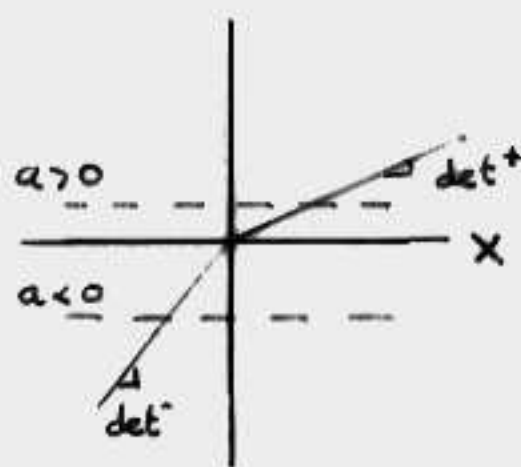
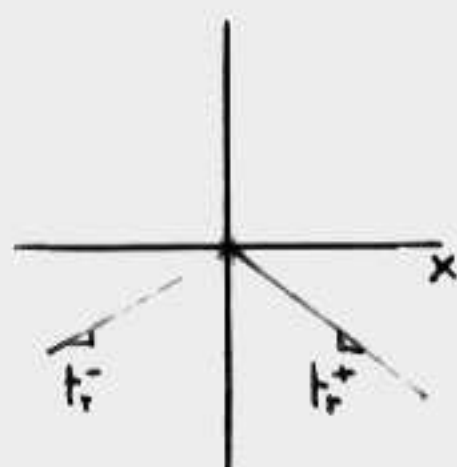
$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A_{\pm} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b$$

$$A_{\pm} = \begin{pmatrix} a_{11}^{\pm} & a_{12} \\ a_{21}^{\pm} & a_{22} \end{pmatrix} \quad b \in \mathbb{R}^2$$

Busqueda de forma Canónica

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Si $a_{12} \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = t_r^{\pm} x - y \\ \dot{y} = \det^{\pm} x - a \end{cases}$ Liénard



- Mediante cambio lineal único llevamos A_+, A_- a forma canónica racional $\begin{pmatrix} t_r & -1 \\ \det & 0 \end{pmatrix}$
- Relación con Teoría de Control (estructura)
 $a_{12} \neq 0 \iff$ Observabilidad

Generalización a $\mathbb{R}^n$: Carmona et. al.
2002

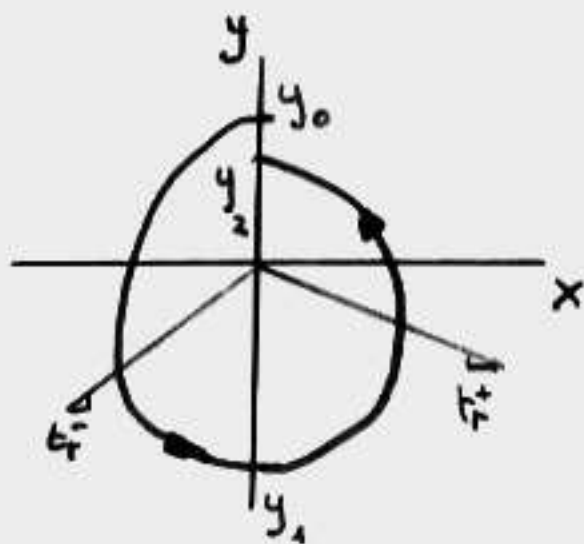
Interpretación Dinámica $\rightarrow$
 $\rightarrow$ existencia de sección al flujo:
 Llibre, Tewel 2004

Condición necesaria de existencia
de ciclos limites $\Rightarrow t_r^+ \cdot t_r^- < 0$

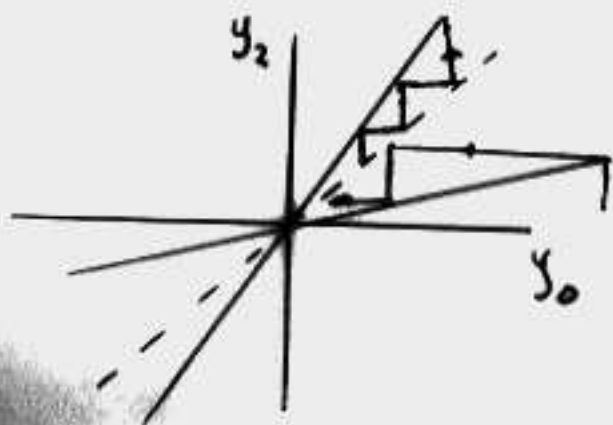
Caso homogéneo : $a=0 \Rightarrow (0,0)$ equilibrio

• Foco-Foco : $t_r^{\pm 2} / 4 < \det^{\pm}$

$$\omega^{\pm 2} = \det^{\pm} - t_r^{\pm 2} / 4$$



$$y_2 = e^{\left(\frac{t_r^+}{\omega^+} + \frac{t_r^-}{\omega^-}\right) \frac{\pi}{2}} y_0$$



$$\frac{t_r^+}{\sqrt{\det^+}} + \frac{t_r^-}{\sqrt{\det^-}} = \rho$$

$\rho < 0$ CONTRACCION GLOBAL

$\rho = 0$ CENTRO

$\rho > 0$ EXPANSION GLOBAL

A la Búsqueda de Ciclo límite :

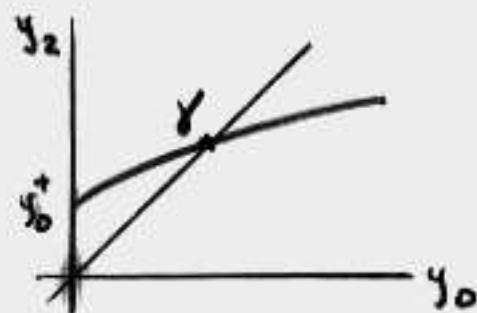
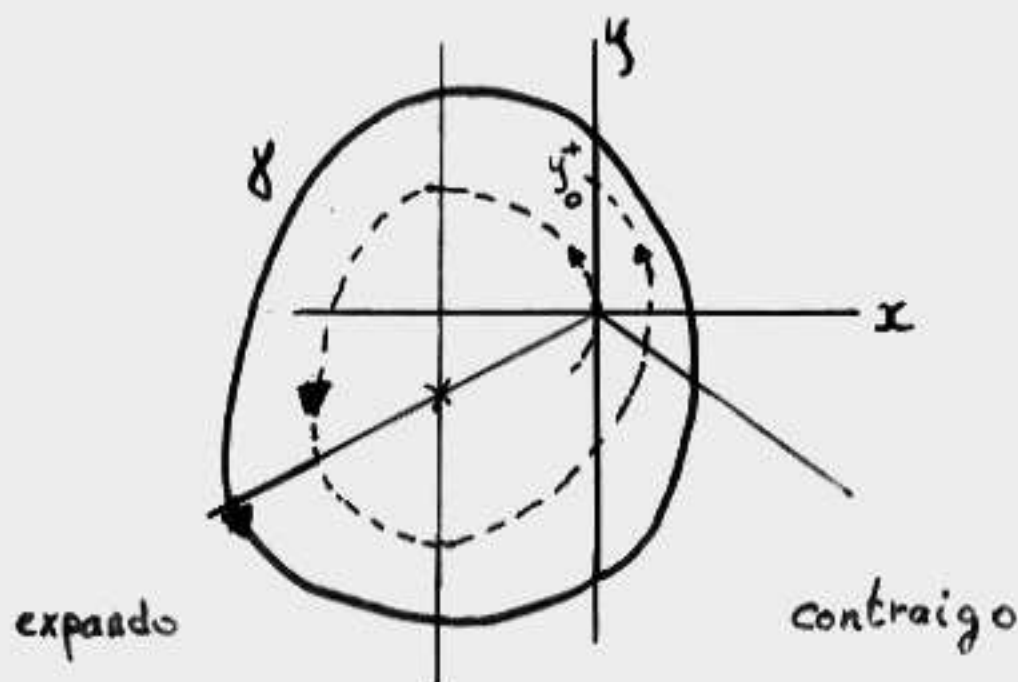
$$a < 0 ; \quad t_r^+ \leq 0 \quad ; \quad \frac{t_r^{+2}}{4} < \det^+ ; \quad p < 0$$

$$t_r^- > 0$$

$\Downarrow$
 $\left(\frac{\det^-}{a}, \frac{t_r^- \cdot \det^-}{a} \right)$
 equilibrio foco
 inestable

$\Downarrow$
 Foco-Foco

$\Downarrow$
 Contracción
 global

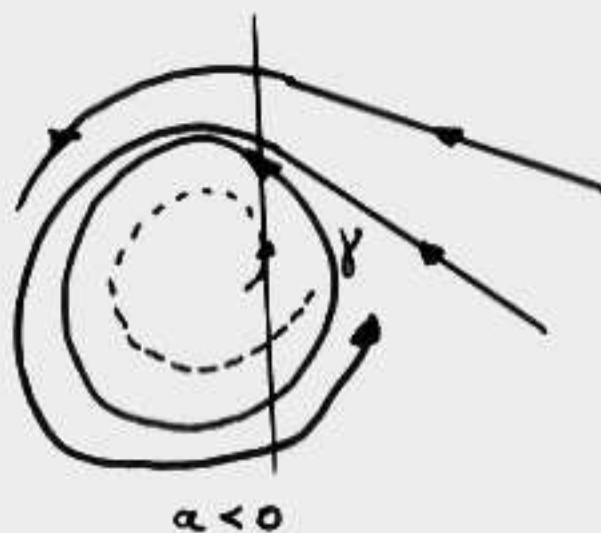
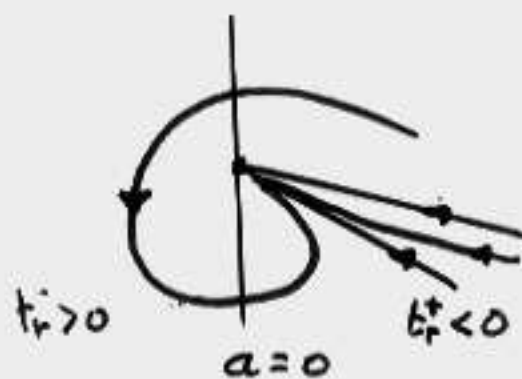


$\exists \gamma$ ciclo límite estable

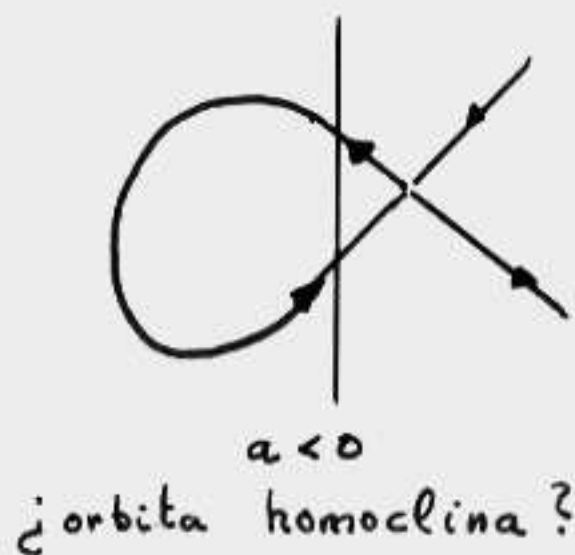
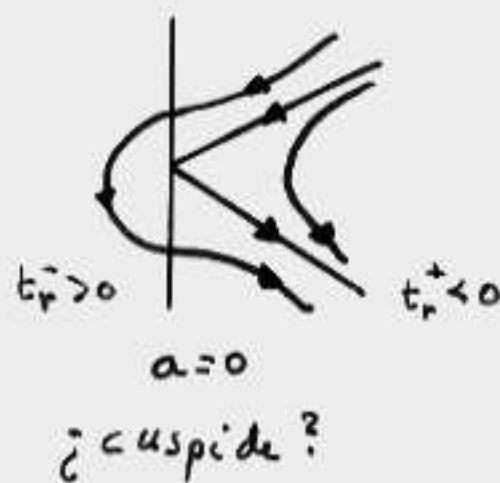
* La prueba se remonta a los años 20 (Andronov)

Otras configuraciones:

• Foco - Nodo



• Foco - Silla



PLANOS DE FASES y

CONJUNTOS DE BIFURCACIONES en

2 ZONAS → estudio completo en

Freire et al. (1998) ; en particular se prueba

la existencia de a lo más un ciclo límite

PLANOS DE FASES y CONJUNTOS

de BIFURCACIONES en 3 ZONAS + SIMETRÍA

Llibre y Sotomayor (1996) → sistema de control
plano

Freire et al. (2002)

Bifurcación tipo Hopf I



$a > 0$ Foco estable;
(lineal)



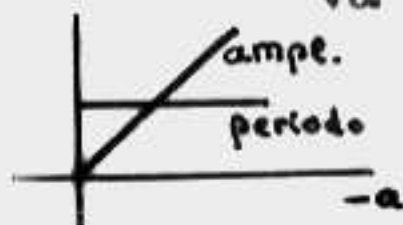
$a = 0$ Foco estable;
(no lineal)



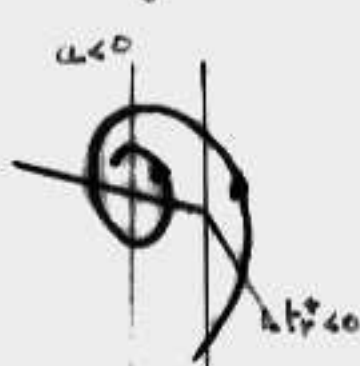
$a < 0$ Foco
inestable + ciclo
límite

$$t_r^- > 0; t_r^+ < 0; \text{ Foco-Foco}; \quad \frac{t_r^+}{\sqrt{d^+}} + \frac{t_r^-}{\sqrt{d^-}} < 0$$

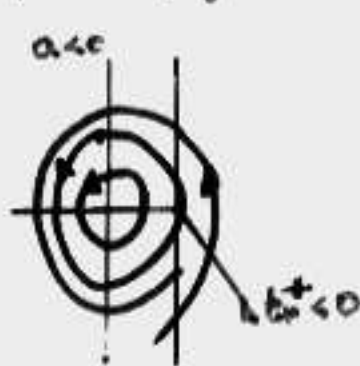
Supercrítica



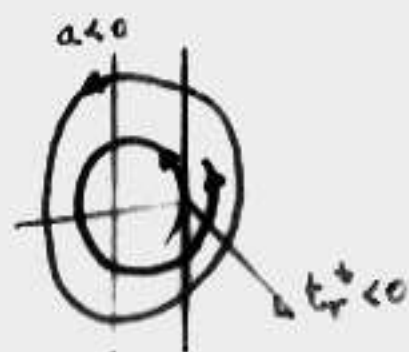
Bifurcación tipo Hopf II (foco-centro-ciclo límite)



$t_r^- < 0$ Foco estable;



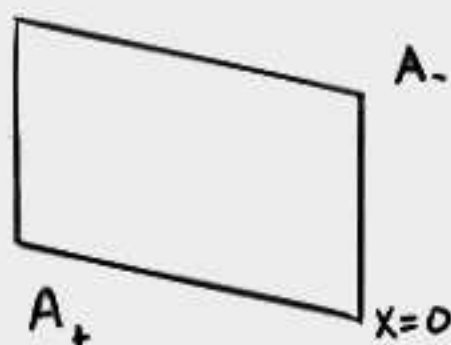
$t_r^- = 0$ Centro
(atractivo)



$t_r^- > 0$ Foco inestable +
ciclo límite

Amplitud, periodo, multiplicador $\rightarrow$ funciones analíticas
de $(t_r^-)^{1/3}$

Sistemas lineales a trozos y continuos en $\mathbb{R}^3$



$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = A_{\pm} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + b$$

$b \in \mathbb{R}^3$

$$A_{\pm} = \begin{pmatrix} a_{11}^{\pm} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}^{\pm} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}^{\pm} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

En condiciones de observabilidad $\rightarrow$

$$\dot{x} = l^{\pm} x - y$$

$$\dot{y} = m^{\pm} x - z$$

$$\dot{z} = d^{\pm} x - a$$

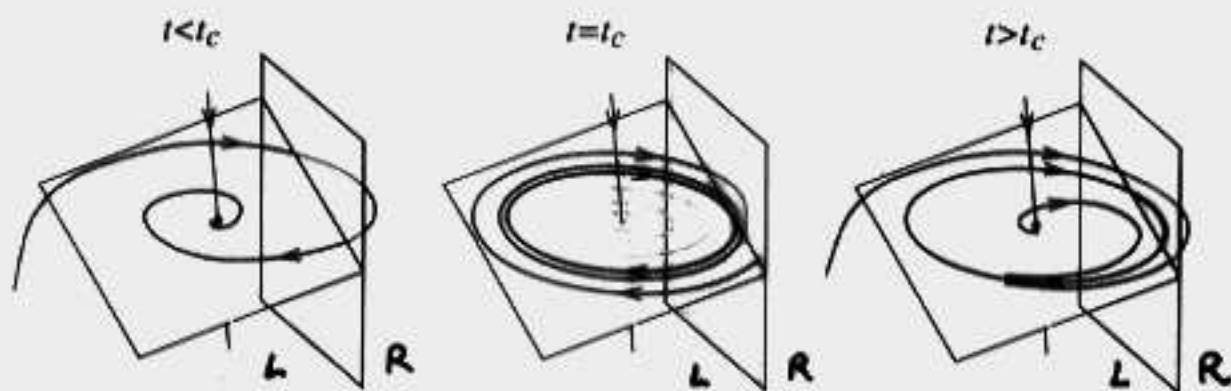
Forma de Liénard
generalizada.

Caso homogéneo : $a=0 \rightarrow$ equilibrio $(0,0,0)$

• tipo topológico ; estabilidad

Charla de V. CARMONA

Bifurcación foco-centro-ciclo límite en sistemas 3D lineales a trozos con dos zonas



$$a = 2 + \frac{(12\pi)^{2/3} m^{4/3}}{4\delta^{2/3}} (t - t_c)^{2/3} + \frac{\pi m^{1/2} \xi}{2\delta(d^2 + m^3) \tanh(\pi d/2m^{3/2})} (t - t_c) + O(t - t_c)^{4/3},$$

$$P_{cr} = \frac{2\pi}{\sqrt{m}} + \frac{\pi(m - M)\sqrt{m}}{\delta} (t - t_c) +$$

$$+ \frac{12^{2/3} \pi^{5/3} m^{5/6}}{10\delta^{8/3}} (d - mT) \left[(D - mT)^2 + m(m - M)^2 \right] (t - t_c)^{5/3} + O(t - t_c)^2,$$

$$\mu_r = -\frac{(12\pi)^{1/3} m^{7/6} \delta^{2/3}}{d^2 + m^3} (t - t_c)^{1/3} + \frac{m^{1/3} \xi \delta^{1/3}}{2(d^2 + m^3)^2 \tanh(\pi d/m^{3/2})} (t - t_c)^{2/3} + O(t - t_c),$$

$$\mu_n = \frac{2\pi d}{m^{3/2}} + \frac{(12\pi)^{1/3} \xi}{m^{5/6} (d^2 + m^3) \delta^{1/3}} (t - t_c)^{1/3} - \frac{m^{1/3} \xi \delta^{1/3}}{2(d^2 + m^3)^2 \tanh(\pi d/m^{3/2})} (t - t_c)^{2/3} +$$

$$+ O(t - t_c),$$

donde $\xi = d^2(mT - d) + m^2(Dm - dM)$; $m > 0$, $d \neq 0$, $t_c = \frac{d}{m}$, $\delta \neq 0$.

$$A_L = \begin{pmatrix} t-1 & 0 \\ m & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}; \quad A_R = \begin{pmatrix} T-1 & 0 \\ M & 0 \\ D & 0 \end{pmatrix}$$

$$\delta = d(m - M) + m(D - mT)$$

Un caso donde se muestra
como la "estructura" puede
ayudarnos a encontrar
dinámicas interesantes.

Noción de controlabilidad en control

No controlabilidad $\Leftrightarrow A_+, A_-$ comparten
autovalores

Proposición (Carmona et al. 2004) :

• si A_+, A_- comparten el par de
autovalores $\pm \beta i$, $\beta > 0$, entonces,
mediante cambios lineales y esca-
lados de parámetros y tiempo,
podemos escribir:

$$\dot{x} = t^{\pm} x - y - 1$$

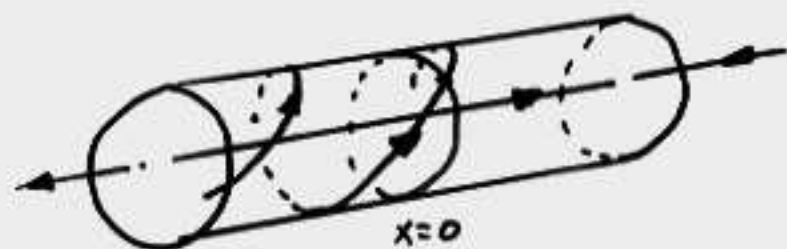
$$\dot{y} = -z$$

$$\dot{z} = y$$

OSCILADOR ARMÓNICO
ACOPLADO A UNA
EC. DIF. NO LINEAL

Suponemos $t^+ > 0$, $t^- < 0 \Rightarrow$

- equilibrios : $(\frac{1}{t^+}, 0, 0)$, $(\frac{1}{t^-}, 0, 0)$
- cilindros invariantes : $y^2 + z^2 = r^2$
- eje OX recta invariante
- conexión heteroclina : segmento $(\frac{1}{t^-}, \frac{1}{t^+})$

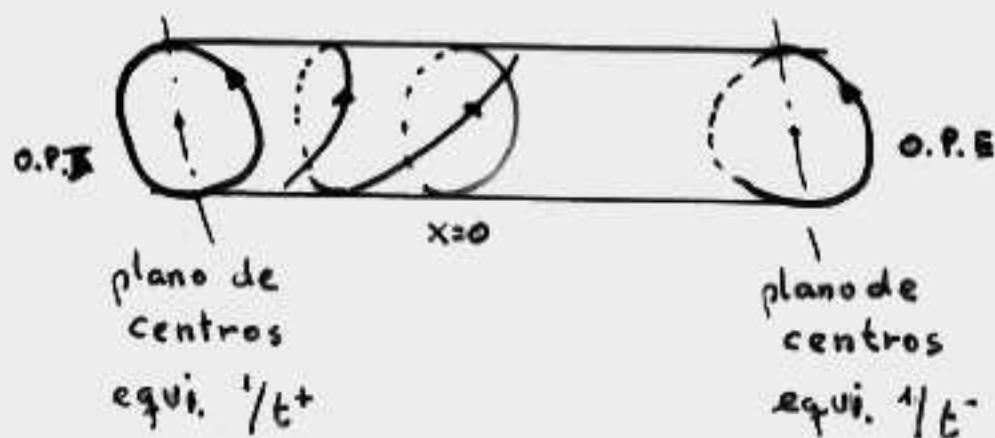


* La dinámica sobre un cilindro

invariante viene determinada por:

$$\frac{dx}{d\theta} = t^{\pm} x - 1 - r \cos \theta$$

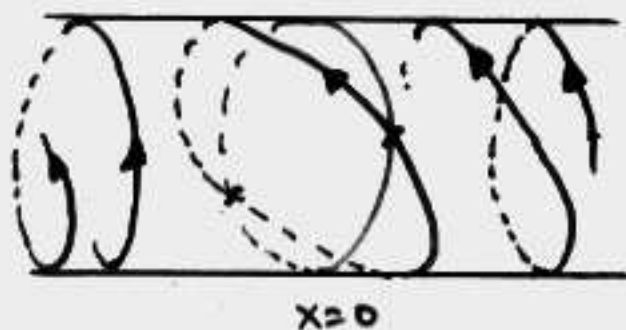
ec. dif. 2π -periódica unidimensional



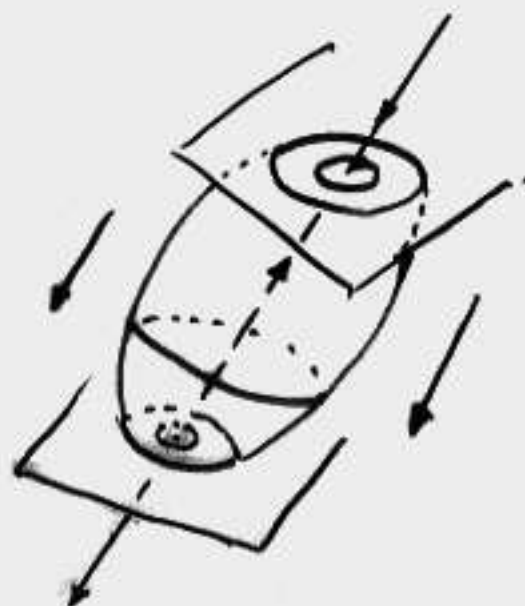
r pequeño



r creciendo



r crítico
O.P. semiestable



Variedad invariante
foliada por O.P.
21
esfera topológica

... Recuerda a un despliegue de
la singularidad Hopf-cero ...

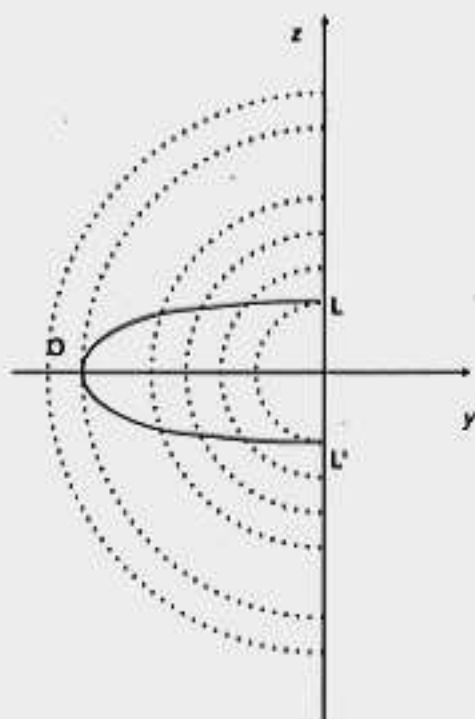
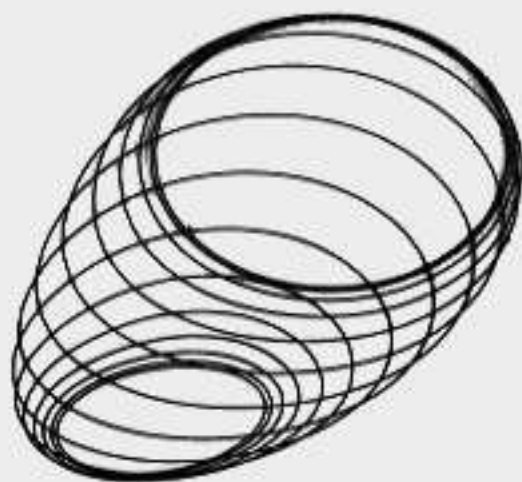
A efectos de simulación numérica
consideremos la siguiente perturbación:

$$\dot{x} = (t^+ - \epsilon_1) x - y - 1$$

$$\dot{y} = \epsilon_2 x + \epsilon_1 y - z \quad \text{con } t^+ = -t^- > 0$$

$$\dot{z} = \epsilon_1 x + y$$

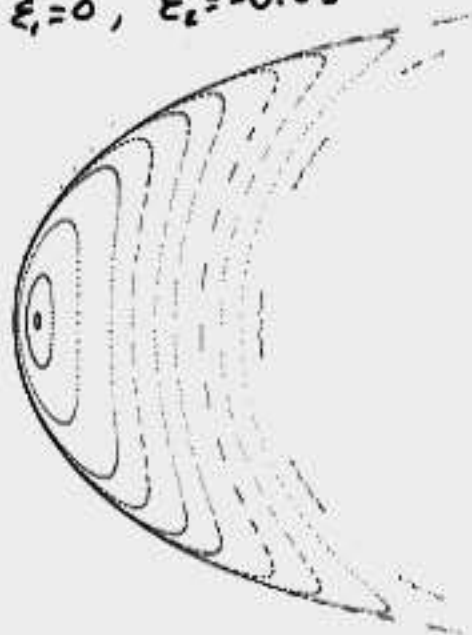
Notar que cuando $\epsilon_1 = 0$ el sistema es
reversible a : $x \rightarrow -x, y \rightarrow y, z \rightarrow -z, \tau \rightarrow -\tau$



Sección $x=0$ para $t^+ - t^- = 0.2$

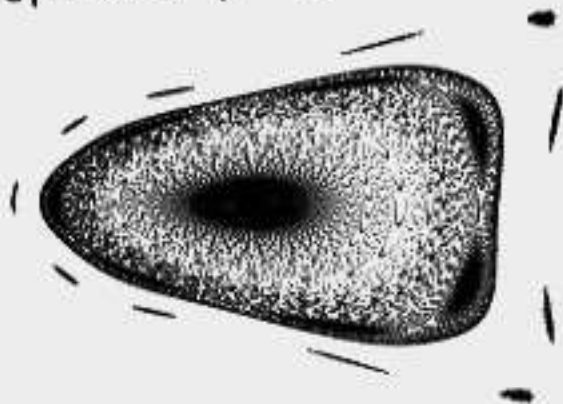
$\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0 \rightarrow$ no controlable y reversible

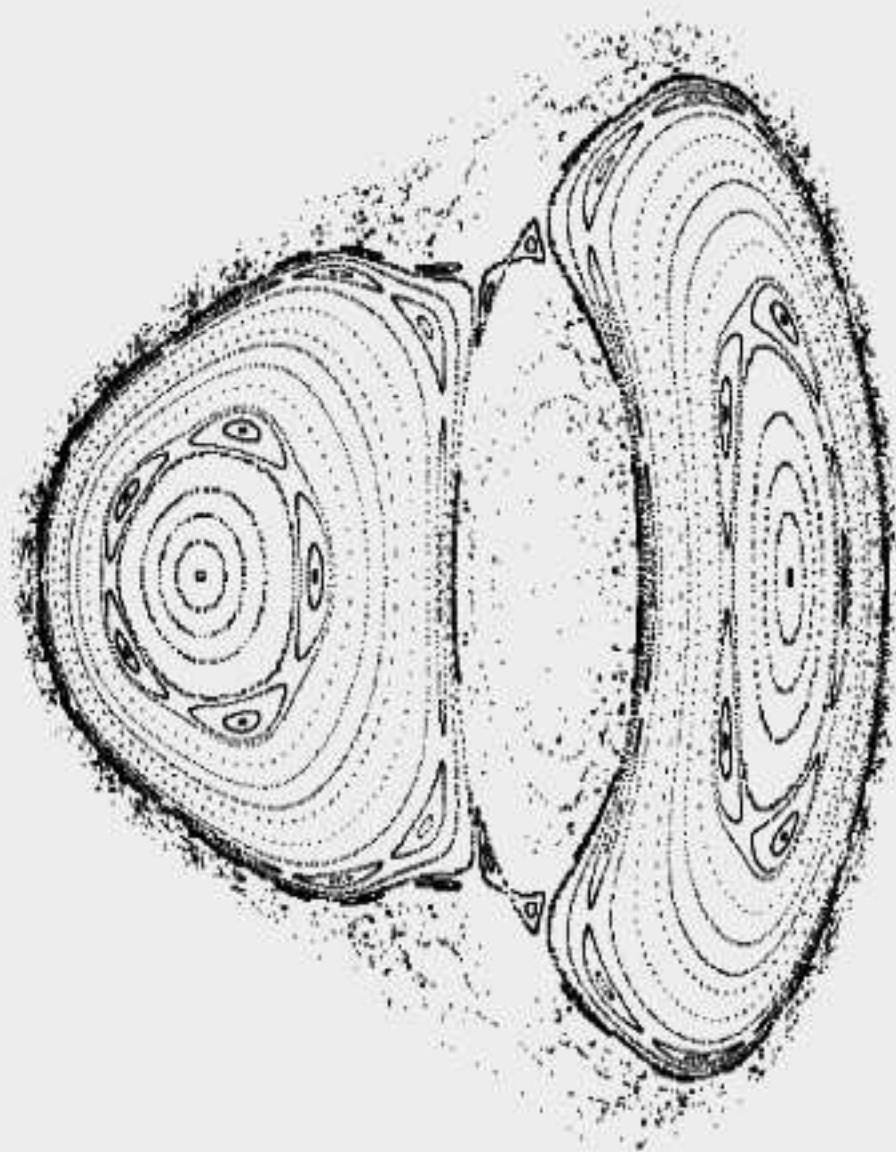
Sección $x=0$ para $t^+ = -t^- = 0.2$
 $\epsilon_1 = 0$, $\epsilon_2 = -0.05$



Reversible
 y
 controlable

Sección $x=0$ para $t^+ = -t^- = 0.2$
 $\epsilon_1 = -0.02$, $\epsilon_2 = -0.05$





$$\dot{x} = -y$$

$$\dot{y} = x - z$$

$$\dot{z} = d^+ x - 1$$

Kunamoto

$$d^+ = -d^- = 0.3$$