

ÓRBITAS DE CONEXIÓN Y VARIEDADES INVARIANTES
EN EL PROBLEMA RESTRINGIDO DE TRES CUERPOS

Gerard Gómez	UB
Manuel Marcote	UB
Josep J. Masdemont	UPC
Josep M. Mondelo	UAB

LA MISIÓN GENESIS

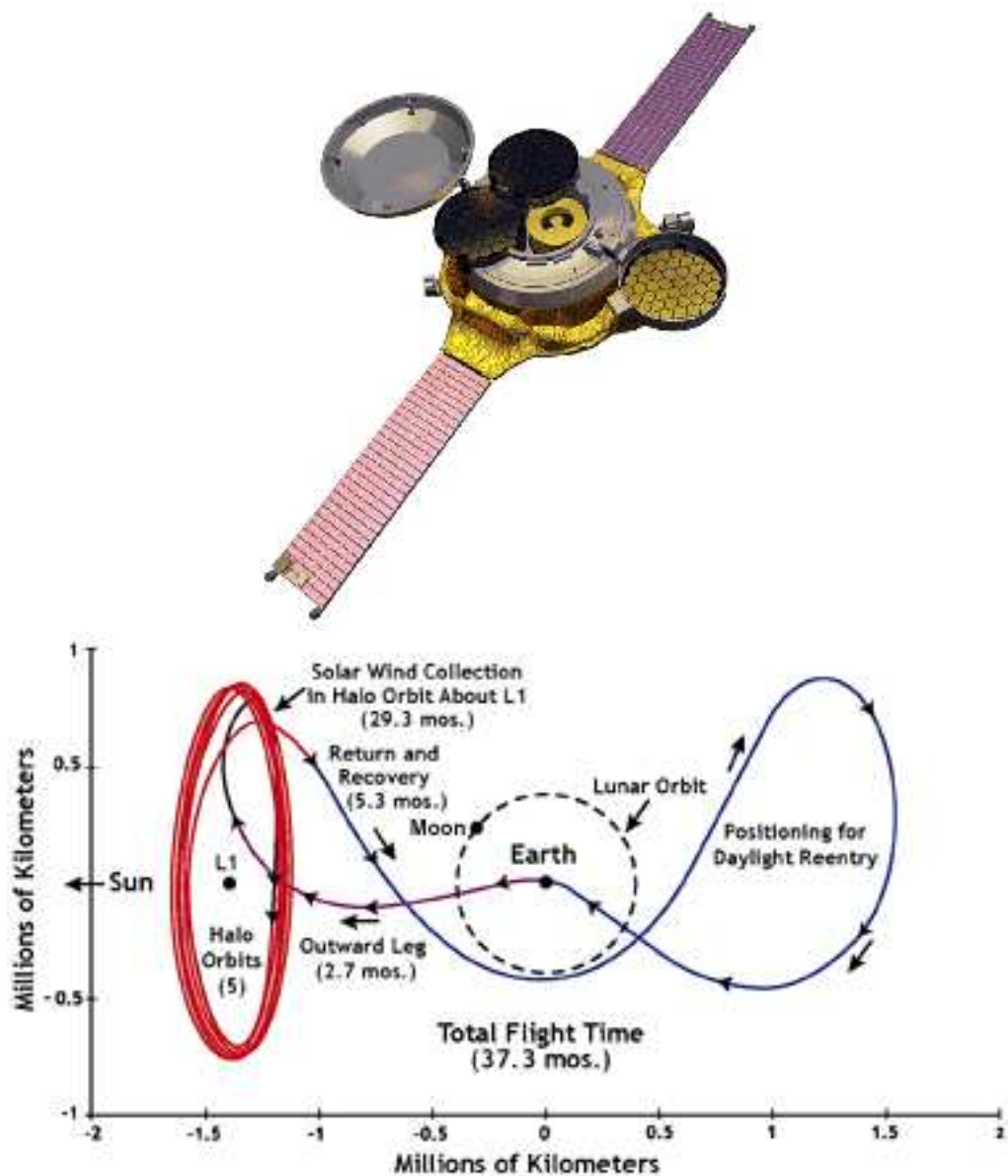


Figura 1: Esquema del satélite y trayectoria nominal de la misión (desde 8-8-2001 hasta 8-9-2004).



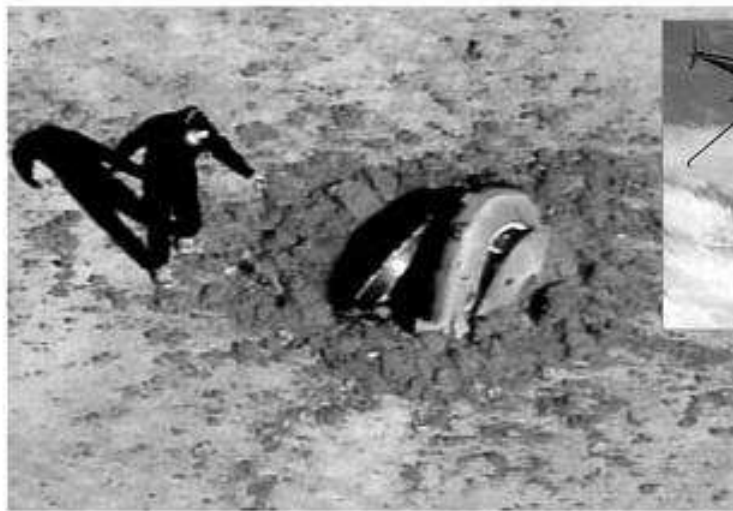
Figura 2: Ensayos del rescate.

Sociedad

TRES AÑOS ALREDEDOR DEL SOL 19

Fiasco de la Nasa con la cápsula Genesis

La nave con partículas solares se estrella sin poder ser 'atrapada' en vuelo



EL ANÁLISIS. Un montaje muestra cómo debía ser el rescate de la *Genesis*; a la izquierda, un técnico observa la cápsula accidentada

rar un garbido en el paracitadas y acompañar a la cédula en su empujamiento. Desembarca hacia un lugar adecuado para que los equipos de rescate se beneficien. Luego del ingreso exitoso a la residencia de la laboradora.

Treinta y siete habitantes de esta zona que forma parte de la tabla clasificada para que fuera un área de desarrollo turístico, han decidido emigrar y establecerse en la zona turística de la zona turística y turística que tanto gusta a los turistas. Muchos de ellos, los que pertenecen a las familias de los turistas, han decidido emigrar a la zona turística y turística que tanto gusta a los turistas. Muchos de ellos, los que pertenecen a las familias de los turistas, han decidido emigrar a la zona turística y turística que tanto gusta a los turistas.

Chlorinated and Acryloylated Polyurethanes

■ La Nasa fracasó en el rescate de la Genesis, cuyo paracaídas falló en pleno aterrizaje e impidió que diversos helicópteros pudieran atrapar la cápsula en vuelo.

EL SENDI AND
[unintelligible]

WASHINGTON. - Los científicos de la NASA y la audiencia televisiva sufrieron una brutal decepción. El que se prometía como gran espectáculo, a espaldas entre la exhibición acostumbrada a los puros Hollywood, se convirtió en un fiasco para la agencia espacial estadounidense. La pequeña película no trataba de Domón, que regresaría a la Tierra después

de un viaje exploratorio de tres años alrededor del Sol, es posible ser amparado en su viaje por los heliofuegos destinados a hacerlo y a pararlo en su victoria, a unos 300 kilómetros por hora, contra el viento de 17 km

Genova contempla cantidades impresionantes de vino o *peñascal*, muy útiles para el *soave* como se originó nuestro sistema solar, cada uno el nacimiento mismo del agua y de los planetas que lo circundan, y como evolución durante miles de millones de años. Se trata de una ocasión única para quienes se dedican a la cocina fundamental. Ninguna otra muestra del comercio ha sido ligada a la Tierra desde la última expedición a la Luna, el Apolo XVI en 1972.

La prosopopeya del valioso material y de los sencillos instrumentos a bordo explica por la General naviara un aprendizaje muy nuevo. Para ello se había diseñado —y ensayado con éxito— un sistema para unirlos perfectamente:

PARTÍCULAS SOLARES

La cápsula, que transportaba partículas solares, debía aterrizar con suavidad, pero se estrelló.

TRACASO MISIÁTICO

La NASA y las televisiones hablan proyectado el rescate como un espectáculo hollywoodense

capítulo durante su vida. Varios helicópteros, pilotados por esos salmistas en peligrado de acción, dubitan crumbar el la treynta dos condente de la Gloriosa cuando esta hubiera abierro al paraiso que letrase no volado. Unos de los helicópteros tanta que con-



Aprovecha esta gran oportunidad que te ofrece **Viatges Crisol**

Jamaica 2x1

9 días / 7 noches
Salidas 16 y 21 Septiembre

OFERTA HOTEL RIU 5**
TODO INCLUIDO**

Antes

2x1

AHORRA

1.245€
por persona

622€
por persona

México 250€

DESCUENTO
por pareja

9 días / 7 noches • OFERTA SEPTIEMBRE
Hocci Rio Luptia 5***** (Jamaica Black Paradise)

TODO INCLUIDO 899€

Precios por persona en habitación doble. Salidas por disponibilidad. Formas de financiación en estos enlaces: [Financiación](#) y [Financiación](#). Uniquely designed para ofrecerle desde sus emisoras las mejores ofertas de viajes y alojamiento con comodidad y satisfacción. No incluye: Seguro de viaje por accidentes y enfermedades, Seguro de viaje por cancelación de viaje.

BARCELONA: Auto. Miraflores, 244. Tel.: 93 311 77 61 • **Ciutadella:** 351. Tel.: 93 421 94 00 • **Gran de Sant Andreu:** 317. Tel.: 93 811 42 42

• **Marina:** 41. Tel.: 93 421 34 50 • **Passeig de la Castellana:** 42. Tel.: 93 400 81 34 • **Sant Gervasi:** 12. Tel.: 93 393 77 54 • **Barceloneta:** 140. Tel.: 93 319 63 00

• **Tramuntana de Sant Carles:** 199. Tel.: 93 490 94 00 • **CORRIELLA DE LLOBREGAT:** Rambla Amador Clave, 34. Tel.: 93 475 14 18

• **HOSPITALLET DE LLOBREGAT:** Auto. Miraflores, 27. Tel.: 93 448 14 40 • **SANT CUSAT DEL VALLES:** Auto. Colòmbia, 15. Tel.: 93 389 74 48



Garantía de chasis

Figura 3: La Vanguardia, 9-9-2004.



Figura 4: De lo perdido saca lo que puedas.



Figura 5: Haciendo el puzzle.

EL PROBLEMA DE REFERENCIA

El problema restringido de tres cuerpos es el definido por

$$\begin{aligned}x'' - 2y' &= \Omega_x, \\y'' + 2x' &= \Omega_y, \\z'' &= \Omega_z,\end{aligned}$$

con

$$\Omega = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu}{\sqrt{(x+1-\mu)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{1-\mu}{\sqrt{(x-\mu)^2 + y^2 + z^2}}.$$

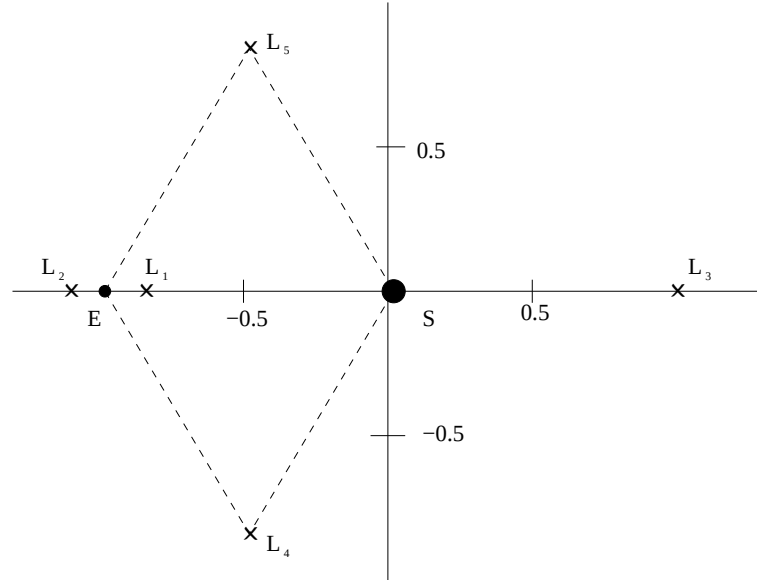


Figura 6: Los puntos de libración de Lagrange en el sistema de referencia (giratorio) y unidades usuales del RTBP.

La abcisa de los puntos $L_{1,2}$ vale

$$x_i = -1 \pm \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} - \frac{1}{3} \left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3} + O(\mu), \quad i = 1, 2.$$

En el sistema Sol–Tierra

$$d(L_{1,2}, \text{Tierra}) \approx 1.5 \cdot 10^6 \text{ km}, \quad d(\text{Sol}, \text{Tierra}) \approx 150 \cdot 10^6 \text{ km}.$$

INTERÉS Y UTILIDAD DE LAS ÓRBITAS ALREDEDOR DE L_1 y L_2

- Es fácil llegar a ellas desde la Tierra.
- Son un buen lugar para observar el Sol y su influencia en la magnetosfera terrestre (space weather).
- Las órbitas alrededor de L_2 del sistema Sol–Tierra son adecuadas para la observación astronómica. La mitad de la esfera celeste está accesible de forma permanente y el Sol la Tierra y la Luna en el otro hemisferio.
- Los sistemas de comunicaciones para satélites ubicados tanto en L_1 como en L_2 , son relativamente simples.
- Para misiones con instrumentos sensibles al calor, el punto L_2 del sistema Sol–Tierra proporciona un ambiente térmicamente estable y adecuado para telescopios de precisión operando en el espectro visible.
- Las órbitas de libración alrededor de L_2 del sistema Tierra–Luna pueden utilizarse para establecer un lazo de comunicaciones permanente ente la Tierra y la cara oculta de la Luna, tal como sugirió A.C. Clark en 1950 y propuso R. Farquhar en 1966.
- Las variedades invariantes asociadas a las órbitas de libración proporcionan mecanismos de transporte interplanetario que puede utilizarse para diseñar misiones de bajo coste que visiten varias de las lunas de Júpiter o Saturno.
- El vuelo en formación de una constelación de satélites es factible utilizando como órbitas de libración como trayectoria de referencia.

LA MISIÓN HITEN

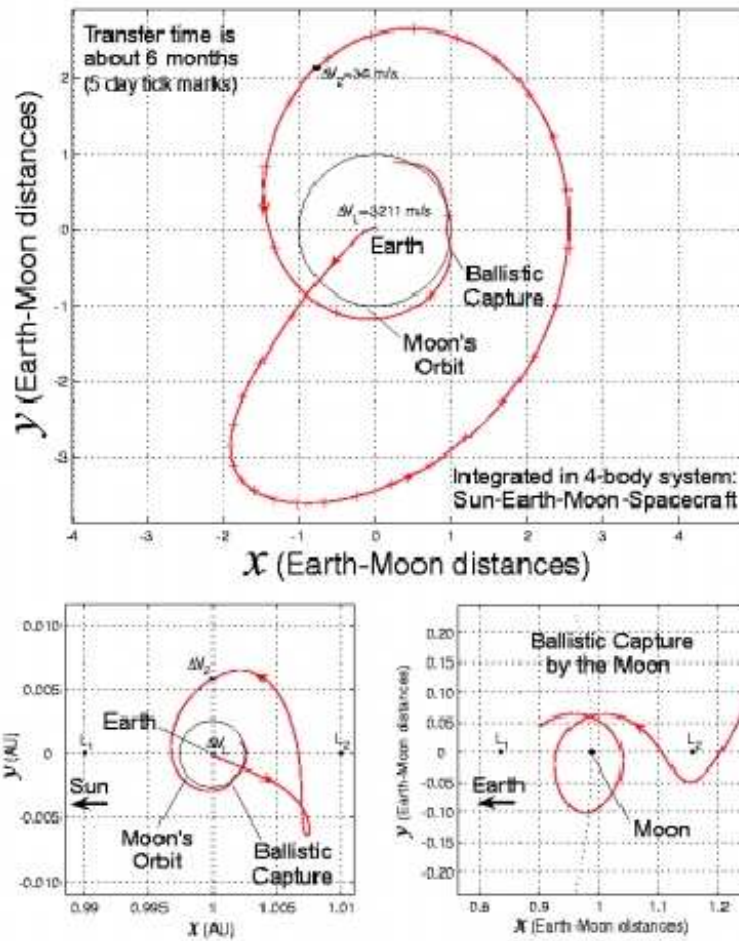


Figura 7: Trayectoria de transferencia de la Tierra a la Luna representada en distintos sistemas de referencia: inercial, giratorio Sol-Tierra y giratorio Tierra-Luna.

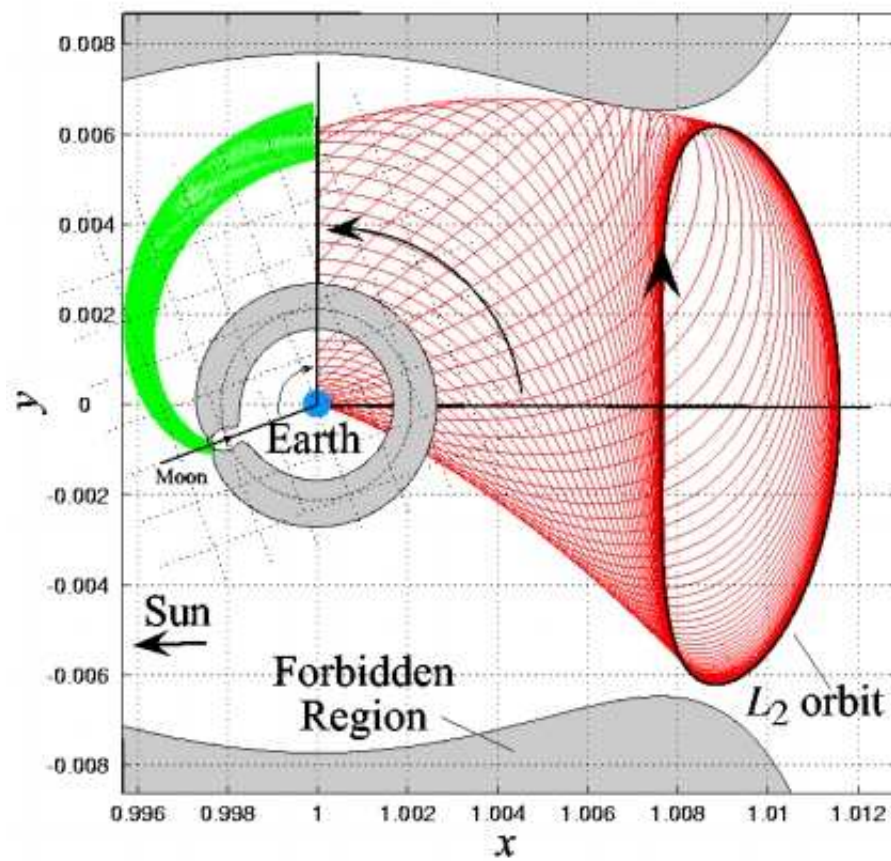


Figura 8: Las variedades estable e inestable de la órbitas de Lyapunov planas alrededor de L_2 Sol-Tierra y L_2 Tierra-Luna.

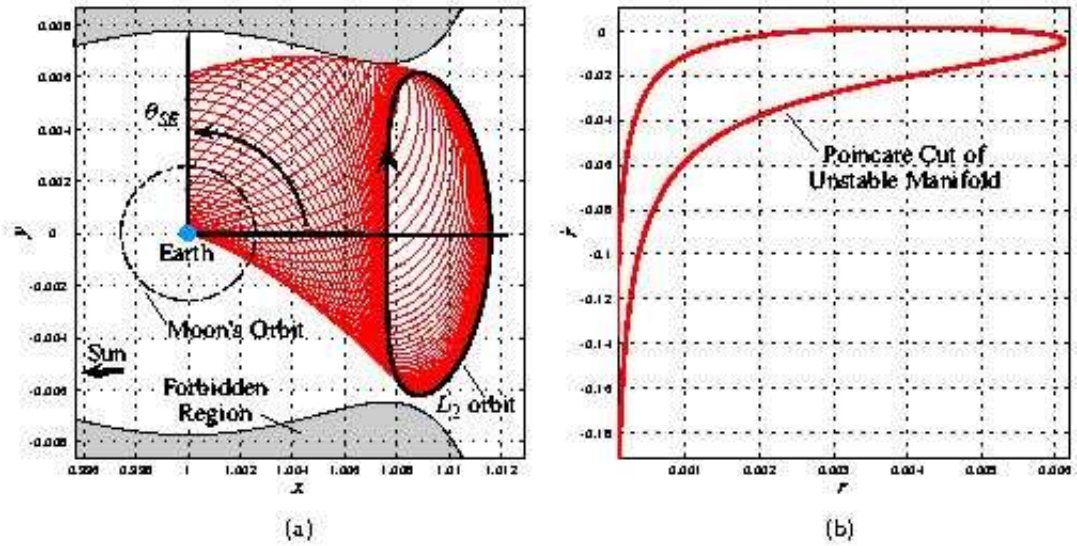


Figura 9: Órbitas de la variedad inestable de la O.P. de Lyapunov alrededor de L_2 Sol–Tierra e intersección de la variedad con la superficie de sección $x = 1 - \mu_T$ en el plano $(y, \dot{y})$.

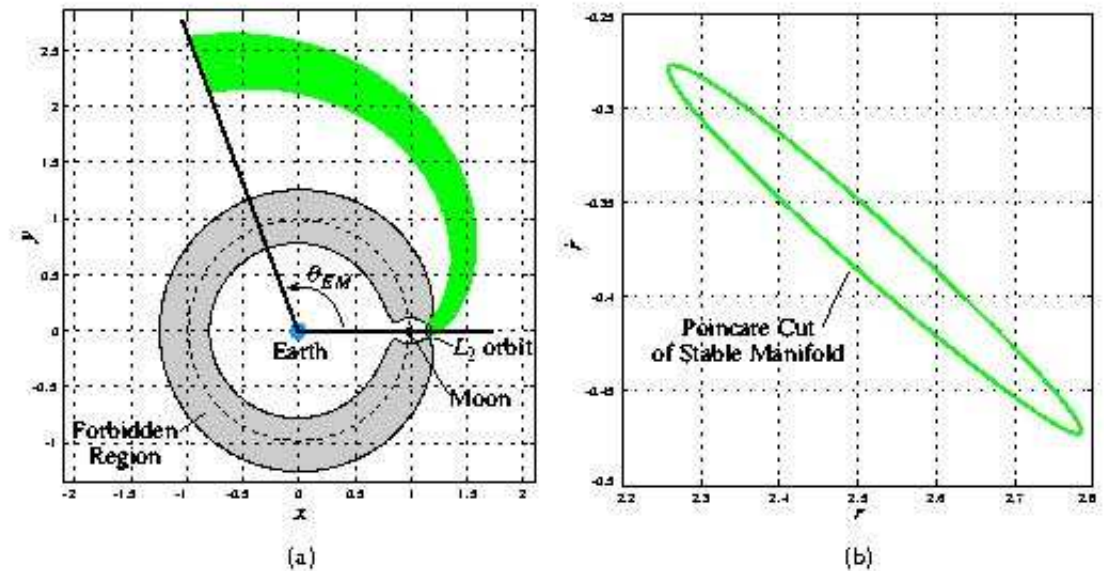


Figura 10: Órbitas de la variedad inestable de la O.P. de Lyapunov alrededor de L_2 Sol–Tierra e intersección de la variedad con la superficie de sección en el plano $(y, \dot{y})$.

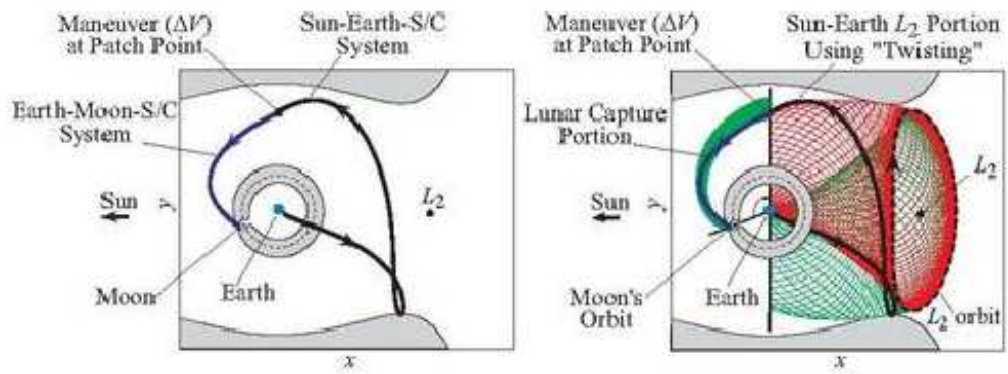
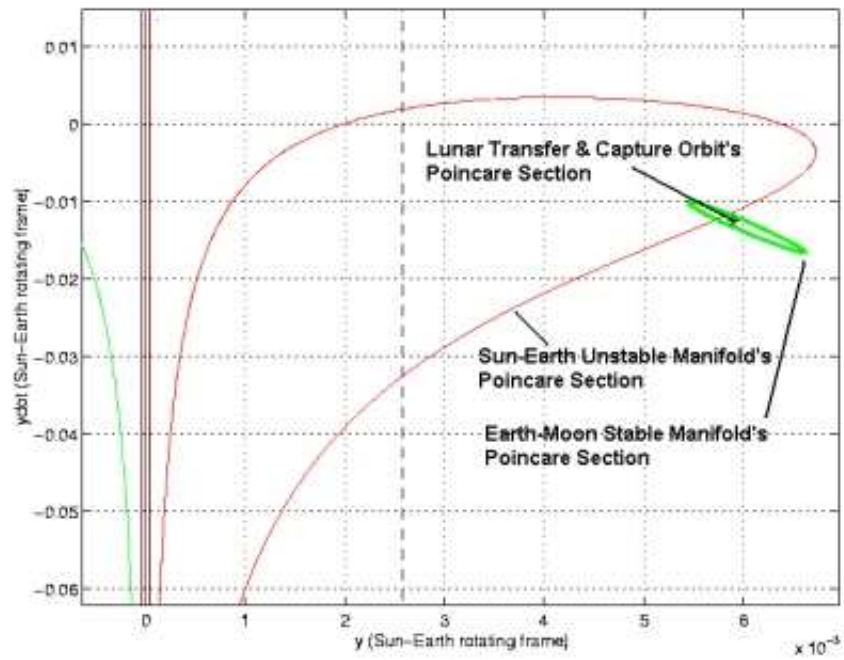


Figura 11: Intersección entre variedades y órbita de transferencia resultante.

PETIT GRAND TOUR MISSION. Intersecciones $L_1 - L_2$

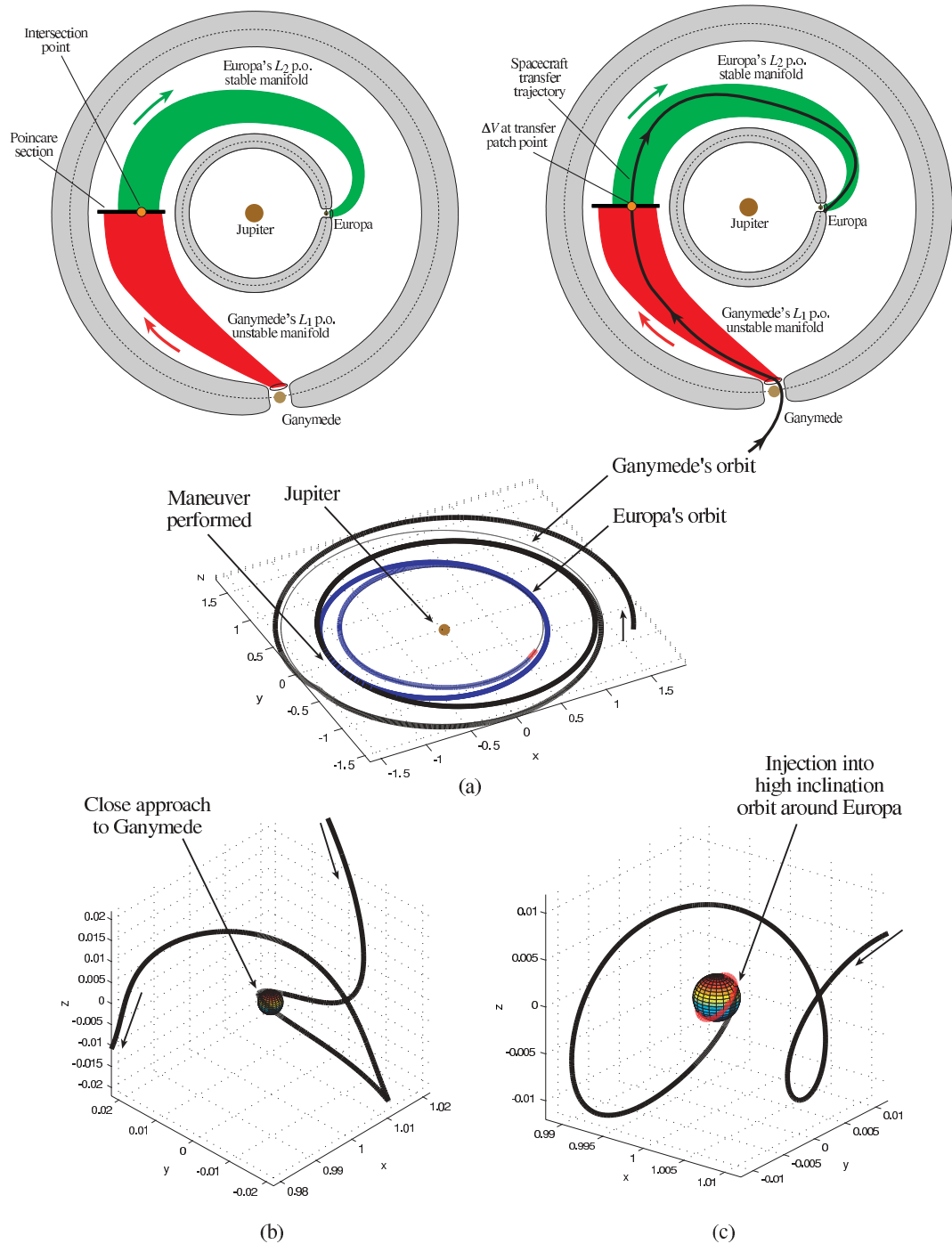


Figura 12: Intersección entre variedades y órbita resultante.

EL ENTORNO DE L_1 Y L_2 (SILLA $\times$ CENTRO $\times$ CENTRO)

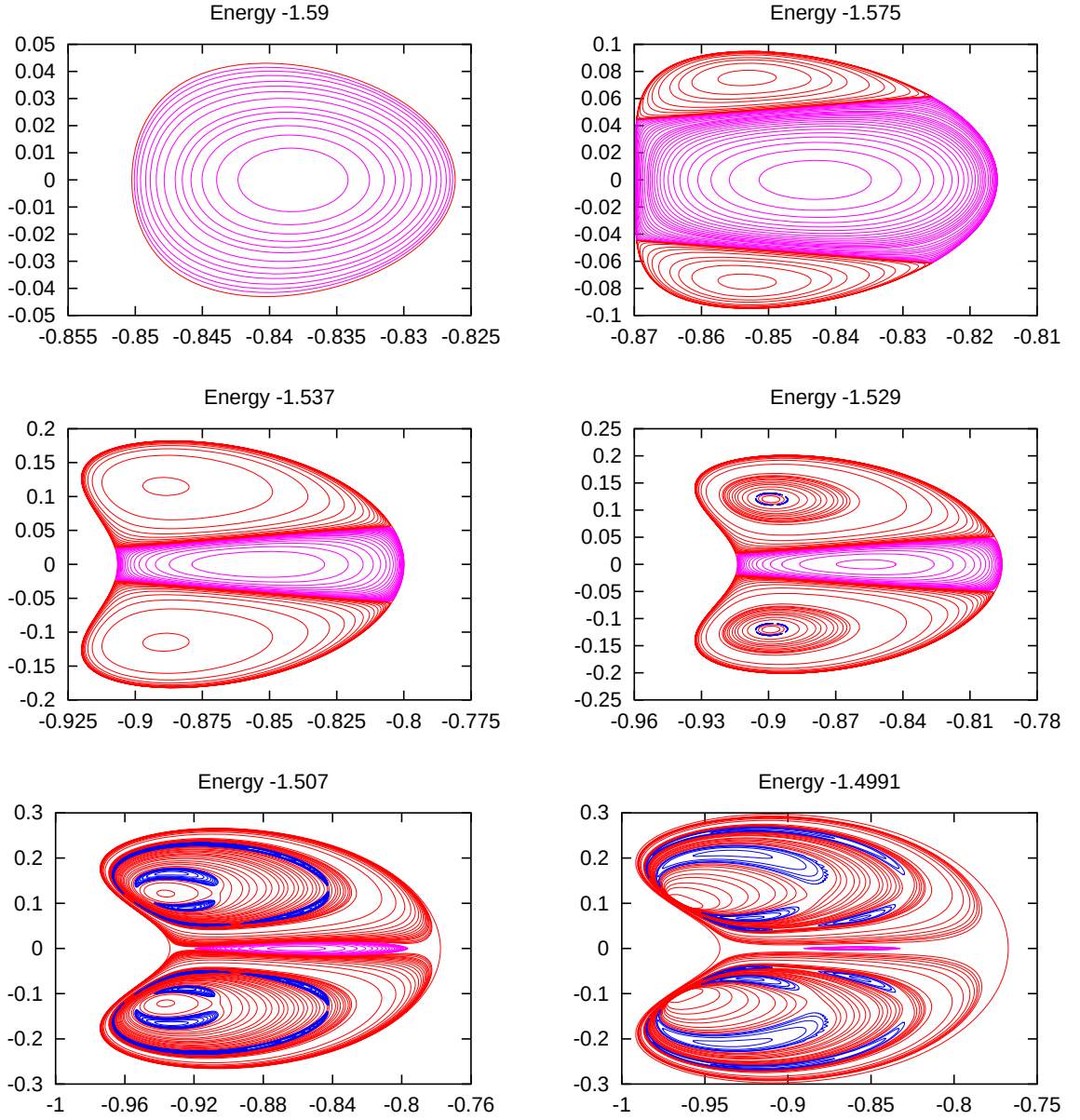


Figura 13: Intersección de las órbitas quasi-periódicas alrededor de L_1 con la sección $z = 0$, $p_z > 0$.

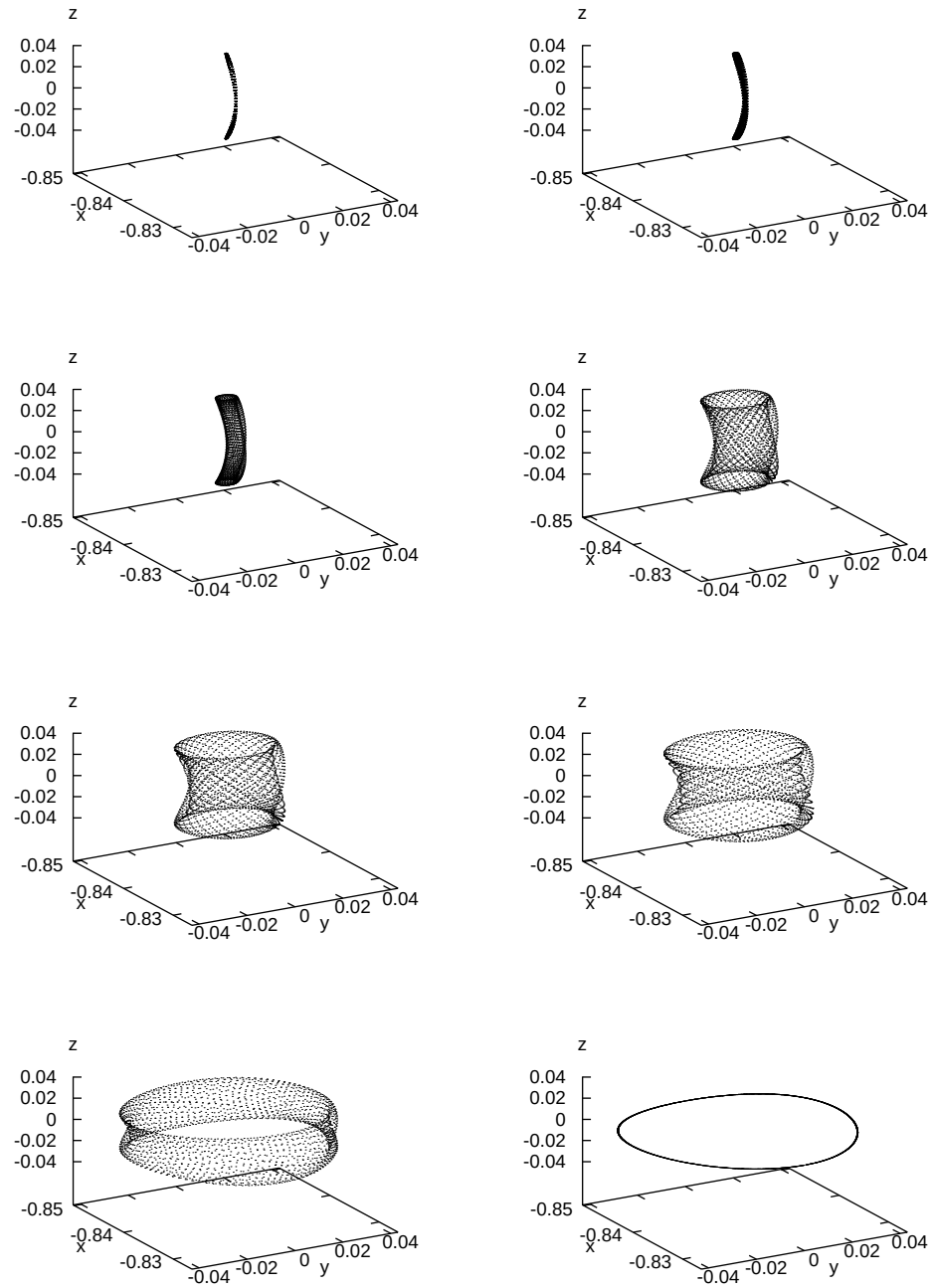
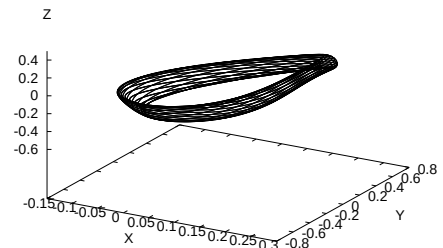
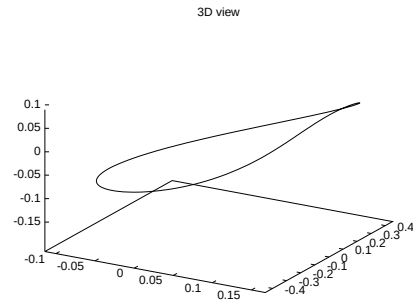
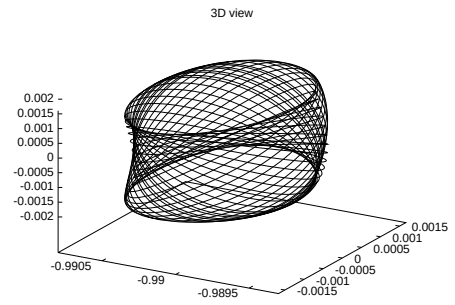
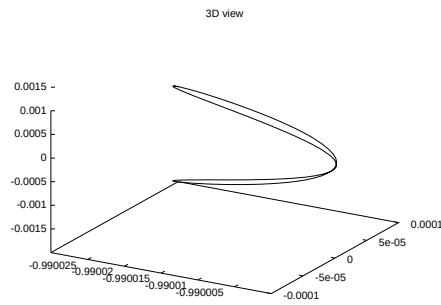
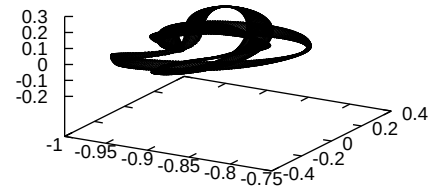
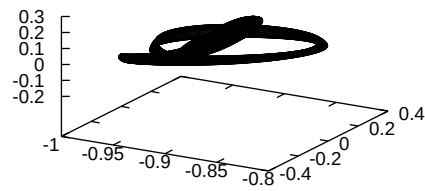


Figura 14: Família isoenergética de toros 2D conectando as órbitas de Lyapunov vertical y plana. ($h=-1.59$, L_1).



L1, period duplication

L1, period triplication



L2, period duplication

L2, period triplication

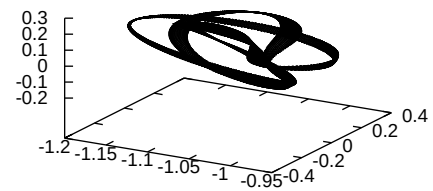
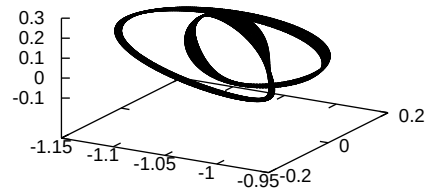


Figura 15: Diversos tipos de órbitas de libración.

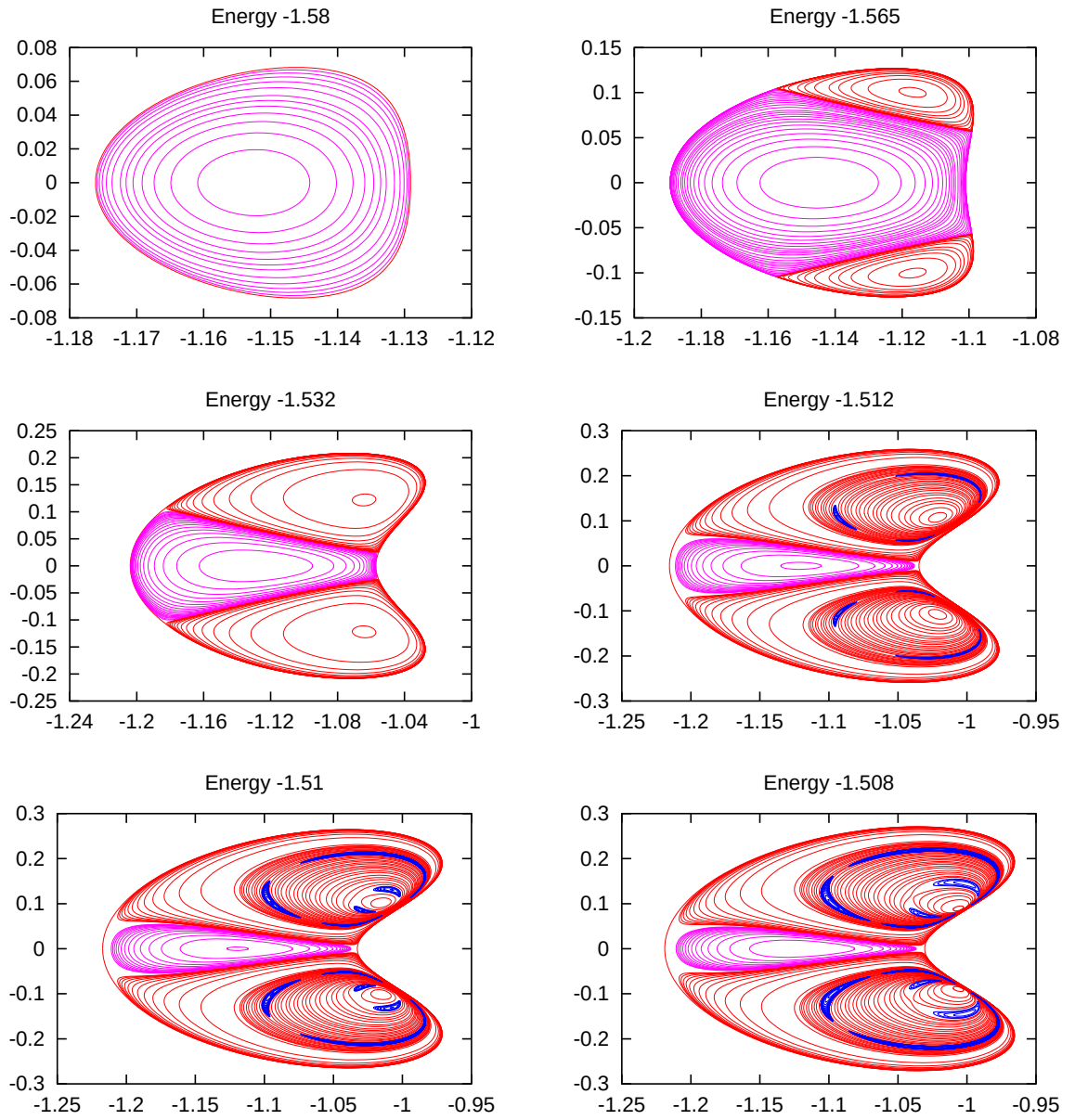
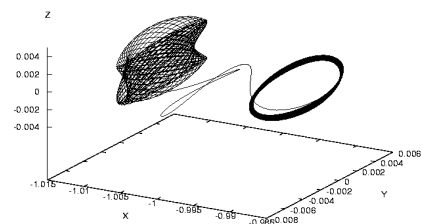
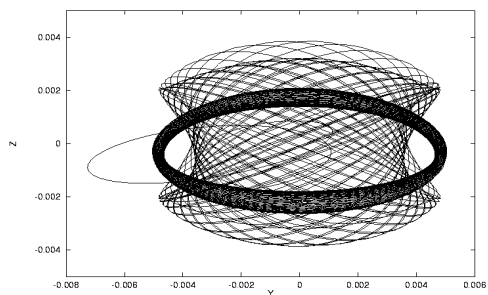
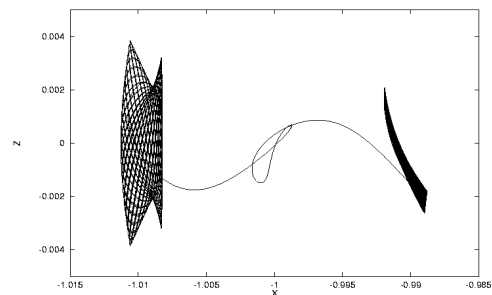
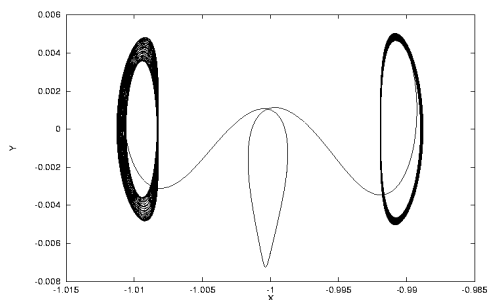
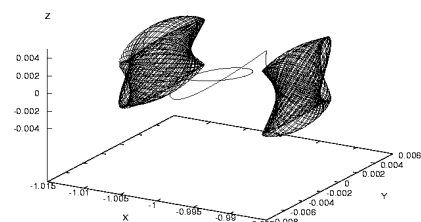
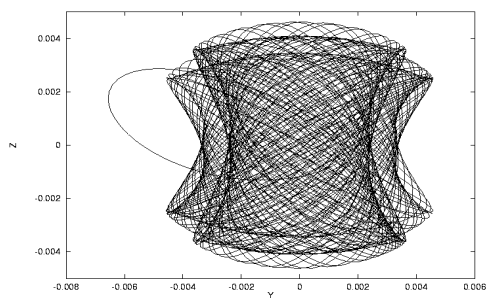
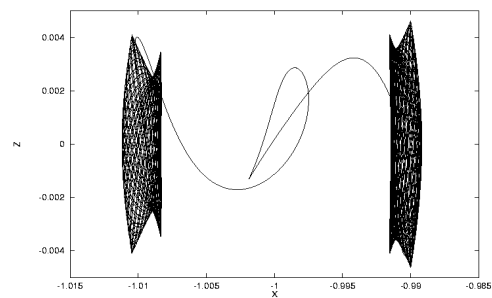
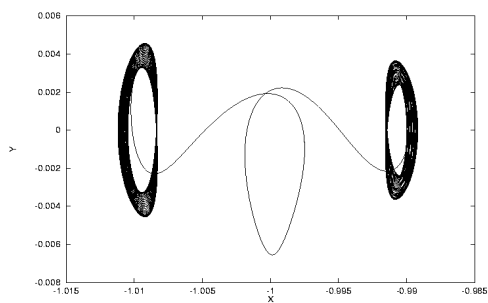


Figura 16: Intersección de las órbitas quasi-periódicas alrededor de L_2 con la sección $z = 0$, $p_z > 0$.

CONEXIONES HETEROCLÍNICAS



EL PROBLEMA DE HILL

Trasladando el origen de coordenadas a $(\mu - 1, 0, 0)$, escalando las variables

$$\begin{aligned}x &= \mu^{1/3}\xi + \mu - 1, \\y &= \mu^{1/3}\eta, \\z &= \mu^{1/3}\zeta.\end{aligned}$$

y expandiendo Ω , las ecuaciones del movimiento quedan formalmente inalteradas tomando

$$\Omega = \frac{1}{2}(3\xi^2 - \zeta^2) + \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}} + \mu^{1/3}\xi \left(\xi^2 - \frac{3}{2}(\eta^2 + \zeta^2) \right) + O(\mu^{2/3}),$$

Despreciando los términos $O(\mu^{1/3})$ ($\mu \rightarrow 0$) obtenemos las ecuaciones del problema de Hill, cuyo Hamiltoniano lo podemos escribir y comparar con el del RTBP

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{Hill} &= \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + yp_x - xp_y \\&\quad - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - x^2 + \frac{1}{2}(y^2 + z^2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{RTBP} &= \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + yp_x - xp_y \\&\quad - \frac{\mu}{\sqrt{(x + 1 - \mu)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1 - \mu}{\sqrt{(x - \mu)^2 + y^2 + z^2}}.\end{aligned}$$

PROPIEDADES

- Si $(\xi(t), \eta(t), \zeta(t))$ es una solución del problema de Hill
 - (i) $s_1(\xi(t), \eta(t), \zeta(t)) = (\xi(-t), -\eta(-t), \zeta(-t))$,
 - (ii) $s_2(\xi(t), \eta(t), \zeta(t)) = (-\xi(-t), \eta(-t), \zeta(-t))$,
 - (iii) $s_3(\xi(t), \eta(t), \zeta(t)) = (\xi(t), \eta(t), -\zeta(t))$,

también son soluciones. Las simetrías s_1 y s_3 también deja invariante el RTBP.

- El problema de Hill sólo tiene 2 puntos de equilibrio:

$$L_1 = (\xi, \eta, \zeta) = (3^{-1/3}, 0, 0), \quad \text{and} \quad L_2 = (\xi, \eta, \zeta) = (-3^{-1/3}, 0, 0).$$

- El análisis del flujo linealizado alrededor de L_1 , muestra que los autovalores son

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \pm \sqrt{1 + 2\sqrt{7}} =: \pm \lambda, \\ \lambda_{3,4} &= \pm \sqrt{1 - 2\sqrt{7}} =: \pm \omega i, \\ \lambda_{5,6} &= \pm \sqrt{-4} =: \pm \nu i, \end{aligned}$$

por lo que el punto de equilibrio L_1 es del tipo

silla $\times$ centro $\times$ centro

como en el RTBP.

FORMA NORMAL DEL PROBLEMA DE HILL ALREDEDOR DE L_1

Los términos lineales del flujo alrededor de L_1 son los definidos por

$$\mathcal{H}_2 = \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2) + q_y p_x - q_x p_y - 4q_x^2 + 2q_y^2 + \frac{1}{2} p_z^2 + 2q_z^2.$$

que, mediante la transformación canónica definida por la matriz simpléctica

$$\begin{pmatrix} 2\lambda/s & 0 & 0 & -2\lambda/s & 2\omega/t & 0 \\ (\lambda^2 - 9)/s & (-\omega^2 - 9)/t & 0 & (\lambda^2 - 9)/s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{\nu} & 0 & 0 & 0 \\ (\lambda^2 + 9)/s & (-\omega^2 + 9)/t & 0 & (\lambda^2 + 9)/s & 0 & 0 \\ (\lambda^3 - 7\lambda)/s & 0 & 0 & (-\lambda^3 + 7\lambda)/s & (-\omega^3 - 7\omega)/t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\nu} \end{pmatrix},$$

se transforman en

$$\mathcal{H}_2 = \lambda q_x p_x + \frac{\omega}{2} (q_y^2 + p_y^2) + \frac{\nu}{2} (q_z^2 + p_z^2),$$

siendo $s = s(\lambda)$, $t = t(\omega)$.

La forma normal compleja simplifica algunos cálculos. Mediante

$$\begin{aligned} q_x &= q_1, & q_y &= \frac{q_2 + ip_2}{\sqrt{2}}, & q_z &= \frac{q_3 + ip_3}{\sqrt{2}}, \\ p_x &= p_1, & p_y &= \frac{iq_2 + p_2}{\sqrt{2}}, & p_z &= \frac{iq_3 + p_3}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

obtenemos

$$\mathcal{H}_2 = \lambda q_1 p_1 + i\omega q_2 p_2 + i\nu q_3 p_3.$$

Podemos escribir el Hamiltoniano como

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \sum_{k \geq 3} \mathcal{H}_k(\mathbf{q}, \mathbf{p}),$$

siendo $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)^T$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)^T$ y $\mathcal{H}_k$ un polinomio homogéneo de grado k en $q_1, \dots, p_3$.

En la aproximación lineal ($\mathcal{H}_2$) la inestabilidad, que queremos remover, está asociada al término $\lambda q_1 p_1$. En ésta aproximación, podemos obtener la parte central haciendo $q_1 = p_1 = 0$.

Al añadir los términos no lineales, deseamos que las trayectorias sean tangentes a éste espacio, esto es $q_1(t) = p_1(t) = 0$, $t > 0$, por lo que deberemos imponer que $\dot{q}_1(0) = \dot{p}_1(0) = 0$.

De acuerdo con las ecuaciones del movimiento para q_1 y p_1 , esta condición se verifica si, por ejemplo, el Hamiltoniano no tiene monomios

$$h_k q_1^{k_1} p_1^{k_2} q_2^{k_3} p_2^{k_4} q_3^{k_5} p_3^{k_6}$$

con $k_1 \neq k_2$.

Así, si $H_N(q_1, p_1, q_2, p_2, q_3, p_3)$ el Hamiltoniano normalizado, hasta un cierto orden, entonces:

- Las órbitas de la variedad central las obtenemos tomando $q_1 = p_1 = 0$.
- La variedad inestable de una órbita de libración la obtendremos tomando $q_1 \neq 0$ y $p_1 = 0$.
- La variedad estable de una órbita de libración la obtendremos tomando $q_1 = 0$ y $p_1 \neq 0$.

EL ESPACIO DE FASES ALREDEDOR DE L_1

Trás la reducción a la variedad central, el espacio de fases tiene dimensión 4. Para describir la dinámica, fijamos una sección de Poincaré $q_3 = 0$, $p_3 > 0$ y utilizamos como parámetro el valor de la energía (Hamiltoniano reducido). El punto L_1 está sobre $h = 0$.

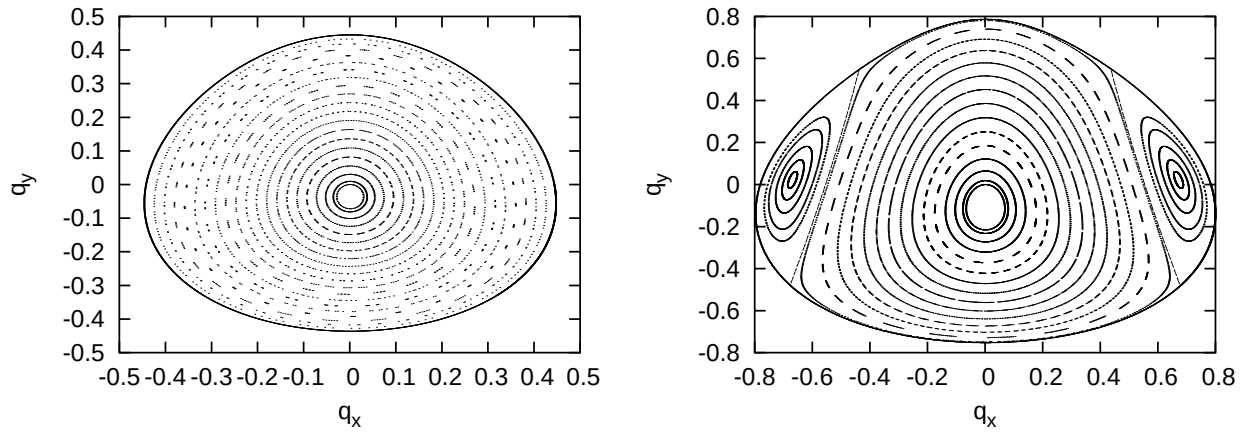


Figura 17: Aplicaciones de Poincaré sobre la variedad central de L_1 para $h = 0.2$ y $h = 0.6$.

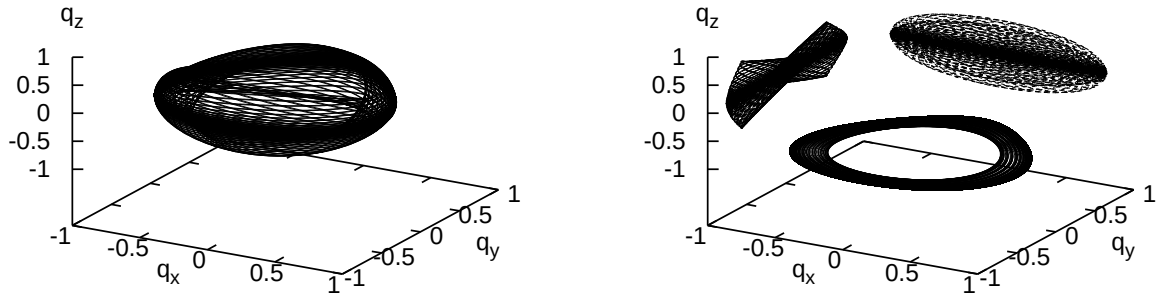


Figura 18: Órbita de la variedad estable de la órbita de Lyapunov plana ($h = 0.6$).

VARIEDADES ESTABLE E INESTABLE DE LA VARIEDAD CENTRAL

Una vez obtenida, por ejemplo, la variedad estable de una cierta órbita de la variedad central de L_1 , las simetrías

$$(q_x(t), q_y(t), q_z(t)) \rightarrow (q_x(-t), -q_y(-t), q_z(-t)),$$

$$(q_x(t), q_y(t), q_z(t)) \rightarrow (-q_x(-t), q_y(-t), q_z(-t)),$$

permiten calcular su variedad inestable y las variedades estable/inestable de la correspondiente trayectoria simétrica alrededor de L_2 .

Con objeto de calcular órbitas heteroclínicas entre las variedades centrales de L_1 y L_2 , hemos de conectar una órbita de la variedad inestable de un punto de libración con otra órbita de la variedad estable de una órbita de libración alrededor del otro punto. Puesto que estas órbitas van de un entorno de L_1 ($q_x > 0$) a un entorno de L_2 ($q_x < 0$), la sección utilizada para detectar las conexiones es el plano $q_x = 0$.

No es necesario globalizar las dos ramas de cada variedad puesto que una de ellas siempre se mueve por la región exterior de la superficie de velocidad cero ($q_x \rightarrow \sqrt{C/3}$).

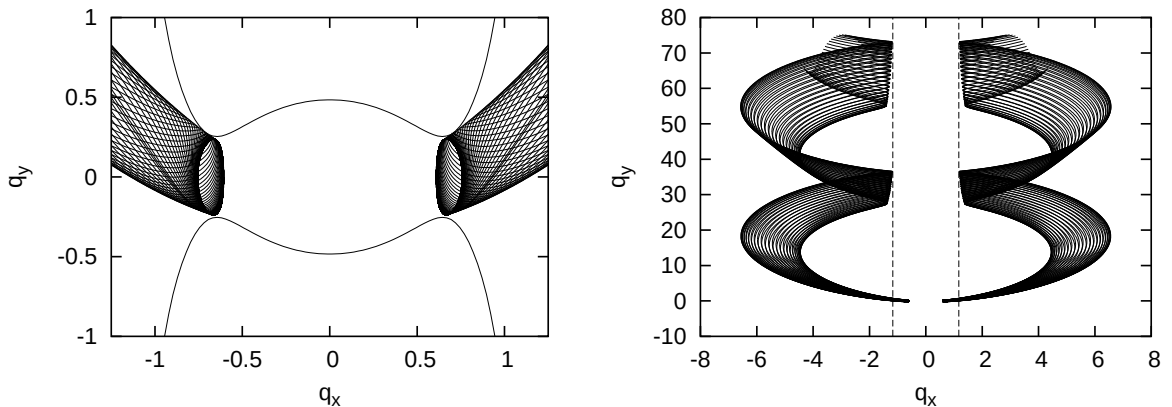


Figura 19: Rama exterior de la variedad estable de las O.P. planas de Lyapunov.

VARIEDADES DE LAS ÓRBITAS PERIÓDICAS

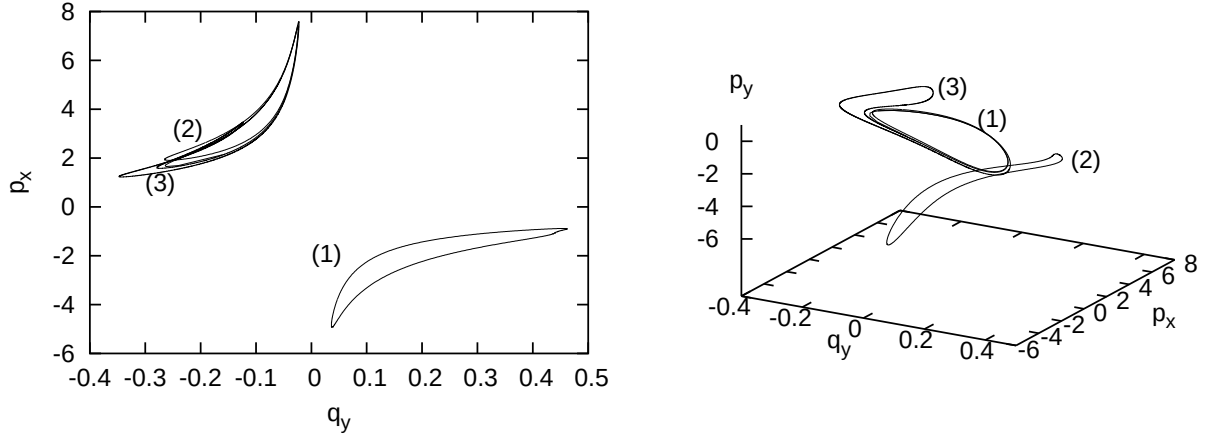


Figura 20: Las tres primeras intersecciones con $q_x = 0$ de la variedad estable de la órbita de Lyapunov plana con $h = 0.2$. Proyecciones (q_y, p_x) y (q_y, p_x, p_y) .

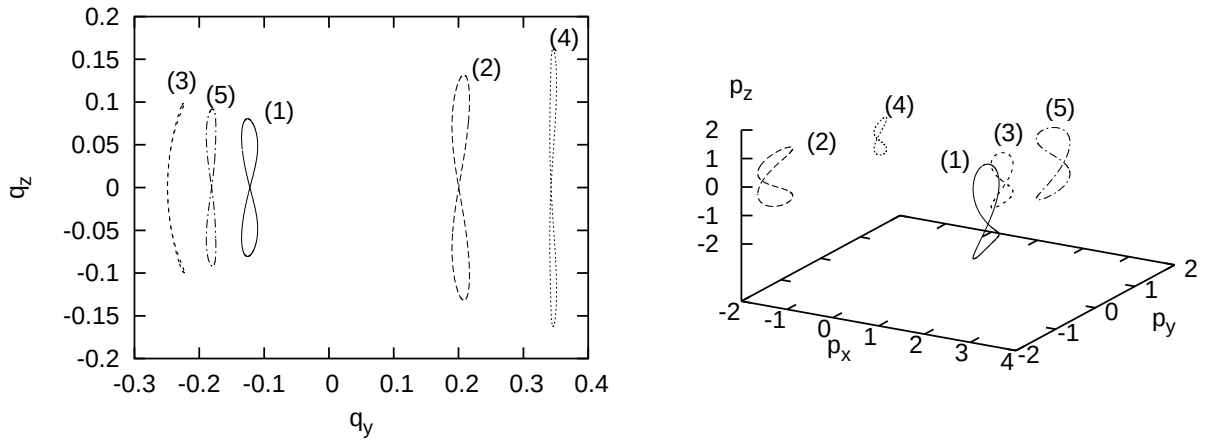


Figura 21: Primeras cinco intersecciones con $q_x = 0$ de la variedad estable de la órbita de Lyapunov vertical con $h = 0.2$. Proyecciones (q_y, p_x) y (q_y, p_x, p_y) .

VARIEDADES DE LA VARIEDAD CENTRAL

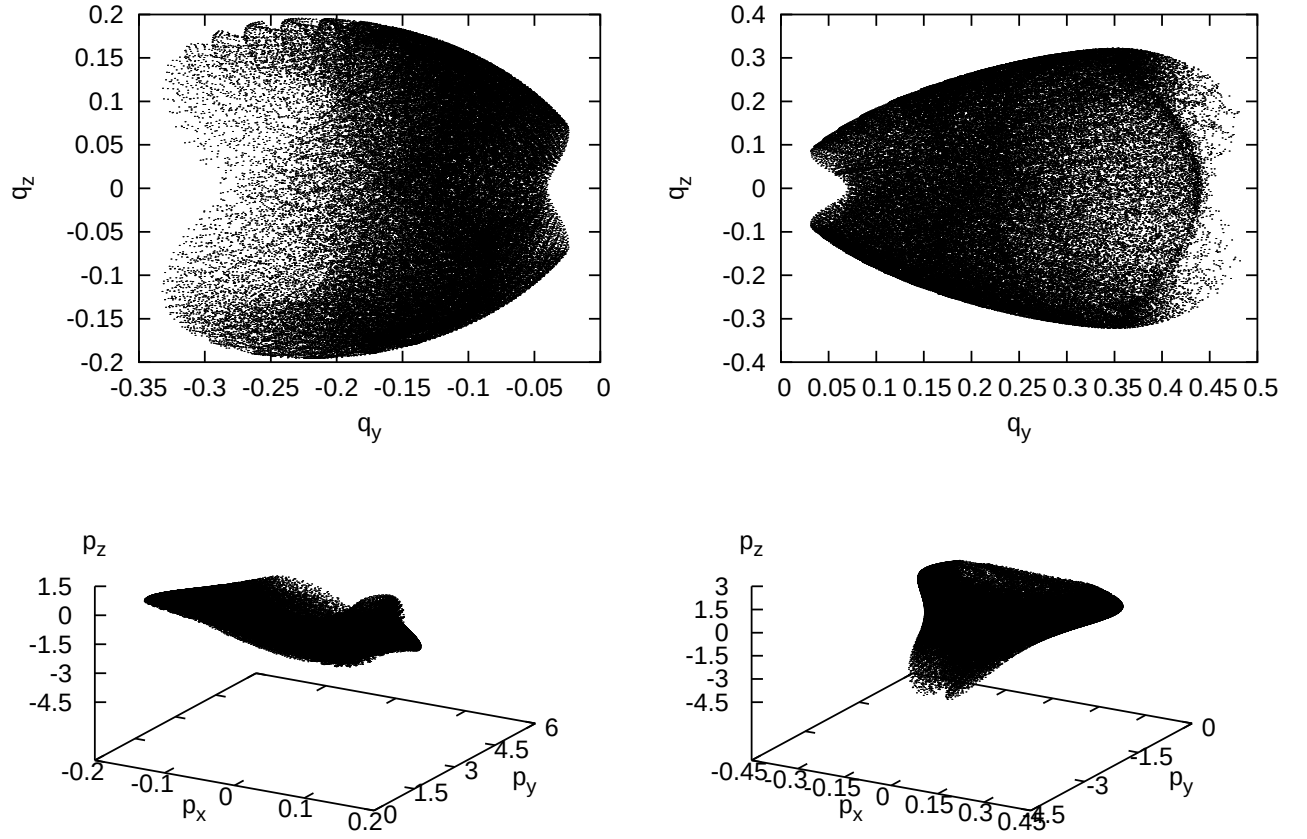


Figura 22: Primeras dos intersecciones con $q_x = 0$ de la variedad central de L_1 para $h = 0.6$. Proyecciones (q_y, q_z) (fila superior) y (p_x, p_y, p_z) (fila inferior).

CONEXIONES HOMOCLÍNICAS Y HETEROCLÍNICAS

Diccionario:

- $\Gamma_{L_1}^{s,q}(p.o.) = q$ -sima intersección de $W_{L_1}^s(p.o.)$ con $q_x = 0$.
- $\Gamma_{L_2}^{u,p}(W_h^c) = p$ -sima intersección de $W_{L_2}^u(W_h^c)$ con $q_x = 0$.

Posibles conexiones homoclinicas entre órbitas periódicas:

$$\Gamma_{L_1}^{u,1}(p.o.) \cap \Gamma_{L_1}^{s,2}(p.o.), \quad \Gamma_{L_1}^{u,1}(p.o.) \cap \Gamma_{L_1}^{s,4}(p.o.) = \Gamma_{L_1}^{u,2}(p.o.) \cap \Gamma_{L_1}^{s,3}(p.o.).$$

Posibles conexiones heteroclinicas entre órbitas periódicas:

$$\Gamma_{L_1}^{u,1}(p.o.) \cap \Gamma_{L_2}^{s,1}(p.o.), \quad \Gamma_{L_1}^{u,1}(p.o.) \cap \Gamma_{L_2}^{s,3}(p.o.) = \Gamma_{L_1}^{u,2}(p.o.) \cap \Gamma_{L_2}^{s,2}(p.o.),$$

$$\Gamma_{L_1}^{u,1}(p.o.) \cap \Gamma_{L_2}^{s,5}(p.o.) = \Gamma_{L_1}^{u,2}(p.o.) \cap \Gamma_{L_2}^{s,4}(p.o.) = \Gamma_{L_1}^{u,3}(p.o.) \cap \Gamma_{L_2}^{s,3}(p.o.).$$

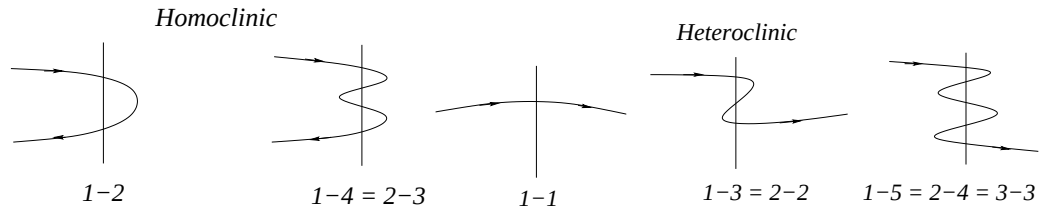


Figura 23: Representación cualitativa de las intersecciones homo/heteroclinicas de orden bajo.

CONEXIONES PARA $h = 0.2$ ENTRE O.P.

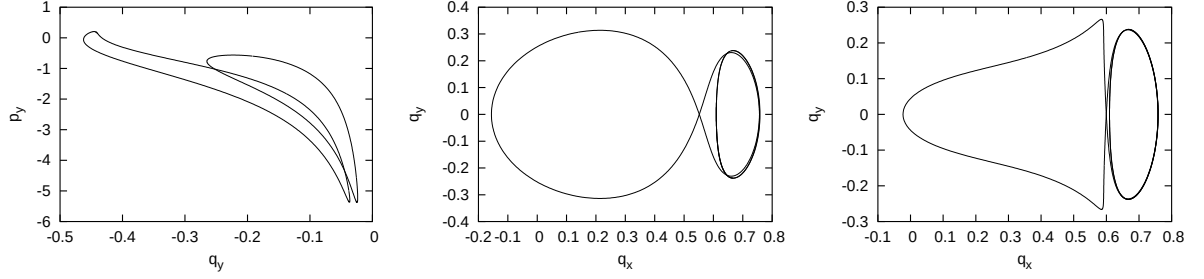


Figura 24: $\Gamma_{L_1}^{u,1}(p.p.o.) \cap \Gamma_{L_1}^{s,2}(p.p.o.)$. Proyección (q_y, p_y) para la intersección de las variedades. Proyección (q_x, q_y) para las órbitas.

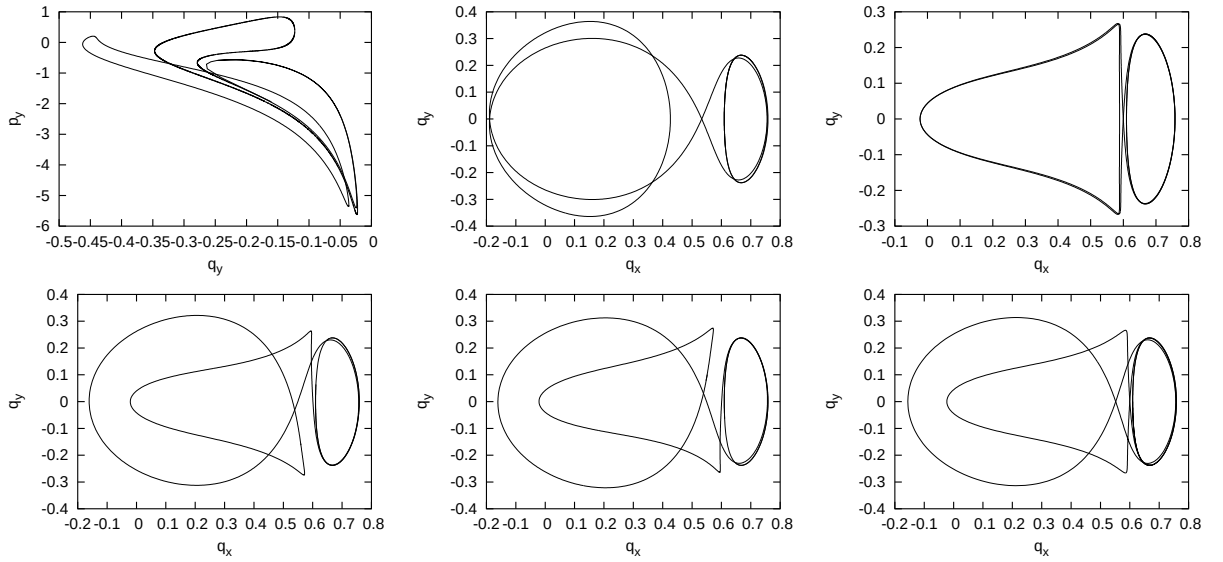


Figura 25: $\Gamma_{L_1}^{u,2}(p.p.o.) \cap \Gamma_{L_1}^{s,3}(p.p.o.)$. Proyección (q_y, p_y) para la intersección de las variedades. Proyección (q_x, q_y) para las órbitas.

Las intersecciones de $\Gamma_{L_1}^{u/s,p}(v.p.o.)$ son vacías para $p \leq 6$.

CONEXIONES PARA $h = 0.2$ ENTRE LISSAJOUS

- Las variedades invariantes de una O.P. plana tienen dimensión 2 y viven en una variedad de (energía constante) dimensión 3, por lo que cabe esperar órbitas homoclínicas aisladas.
- Las variedades invariantes de una Lissajous (toro 2D) tienen dimensión 3 y viven en una variedad de (energía constante) dimensión 5, por lo que también cabe esperar órbitas homoclínicas aisladas.
- Al considerar Lissajous próximas a la O.P. plana, parece razonable encontrar conexiones homoclínicas próximas a las de las O.P.
- Al considerar Lissajous próximas a la O.P. vertical, parece razonable no encontrar conexiones.

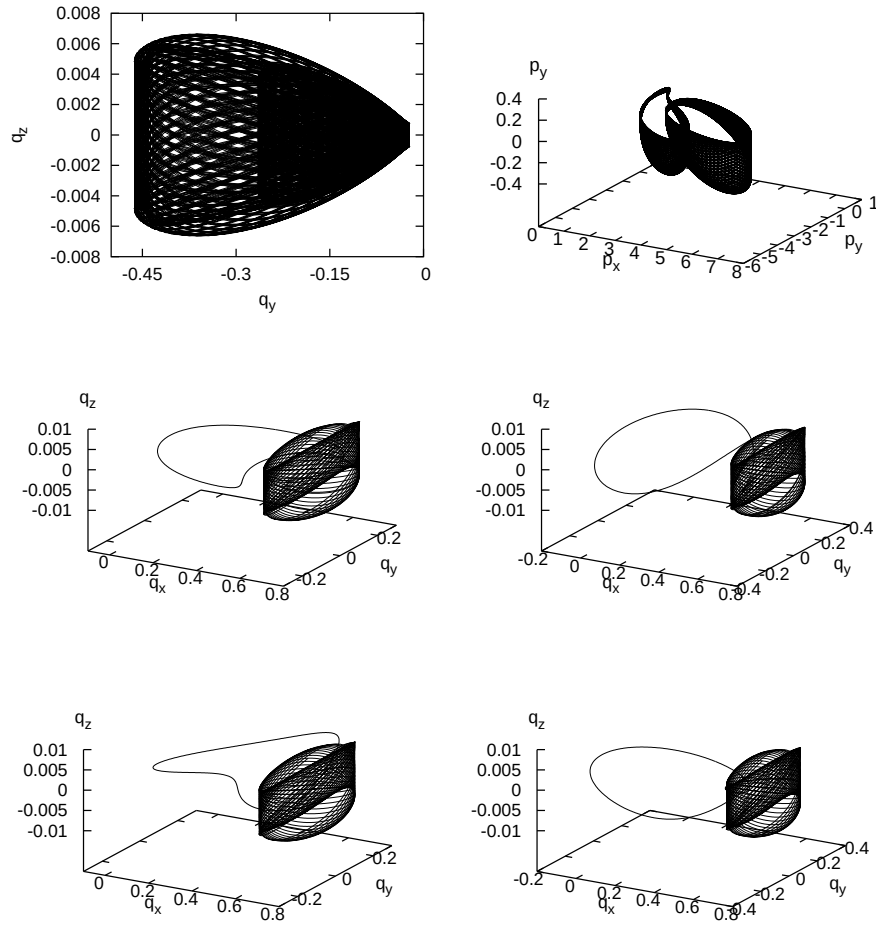


Figura 26: Los cuatro puntos de $\Gamma_{L_1}^{u,1}(Liss) \cap \Gamma_{L_1}^{s,2}(Liss)$ Proyecciones (q_y, q_z) y (p_x, p_y, p_z) para las variedades y (q_x, q_y, q_z) para las órbitas. La Lissajous es próxima a la O.P. plana.

Fijando los valores de (q_1, p_1) utilizados para la globalización de las variedades y de la energía, al movernos sobre la variedad central, la familia de conexiones homoclínicas es una curva 3-dimensional. Si seguimos los puntos de esta curva por el flujo hasta la sección $q_3 = 0, p_3 > 0$ utilizada para la representación de la variedad central, se obtiene:

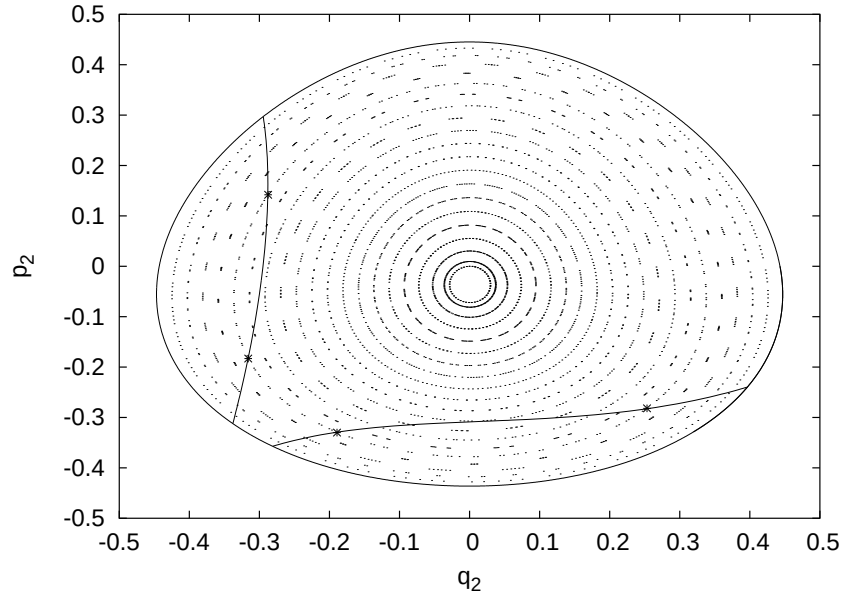


Figura 27: Representación de las conexiones homoclínicas 1-2, $\Gamma_{L_1}^{u,1}(Liss) \cap \Gamma_{L_1}^{s,2}(Liss)$, sobre la variedad central de $h = 0$.

CONEXIONES HOMOCLÍNICAS 2–3 ENTRE LISSAJOUS

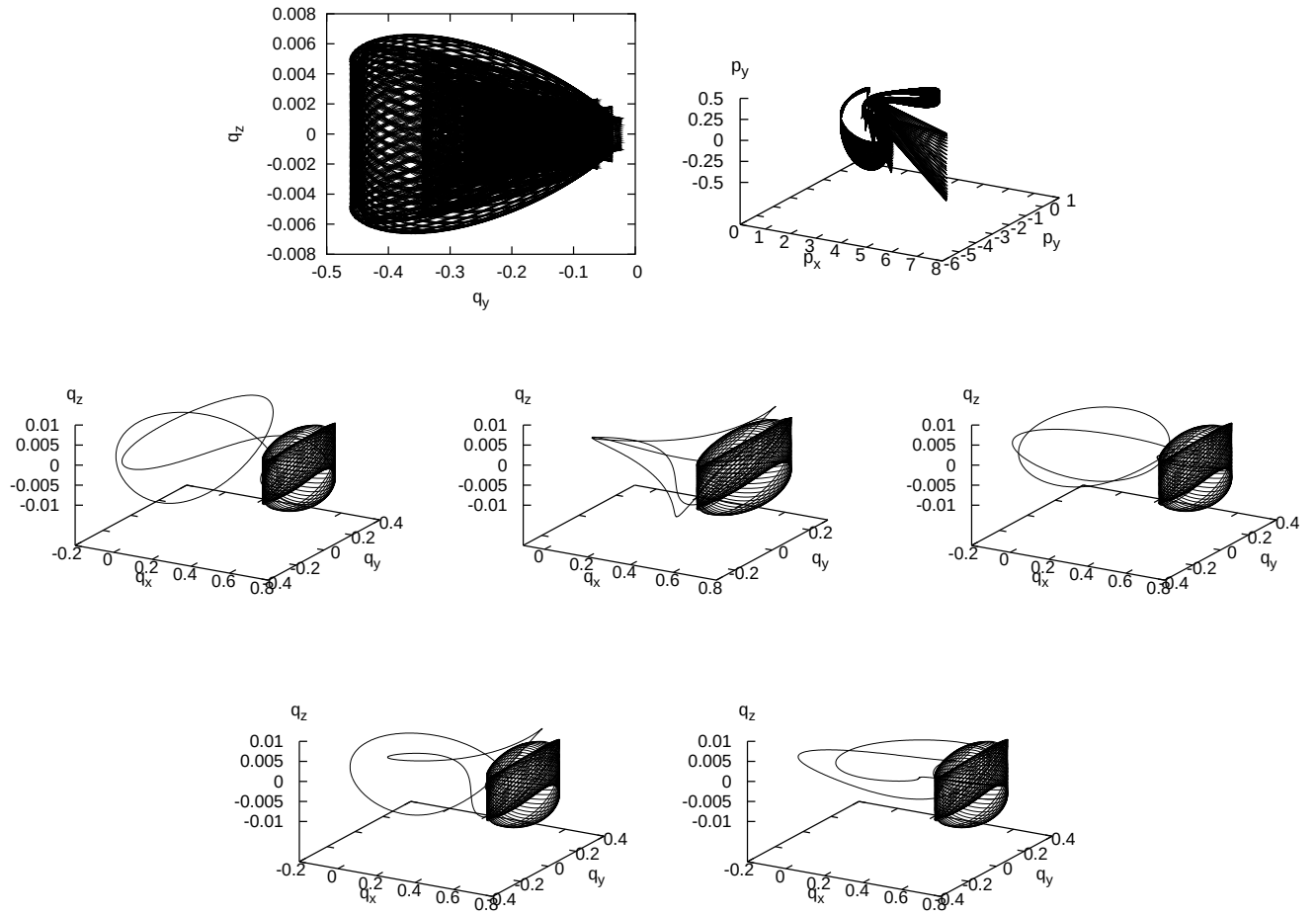


Figura 28: Los cinco puntos de $\Gamma_{L_1}^{u,3}(Liss) \cap \Gamma_{L_1}^{s,2}(Liss)$ Proyecciones (q_y, q_z) y (p_x, p_y, p_z) para las variedades y (q_x, q_y, q_z) para las órbitas. La Lissajous es próxima a la O.P. plana.

Teorema: Las conexiones homoclinicas (y heteroclinicas) de la variedad central de L_1 (o L_2) no sólo se pueden calcular sino que también existen, incluso para el RTBP si μ suficientemente pequeña. (Anna Sammà, 2004).

CONEXIONES HETEROCLÍNICAS L_1-L_2

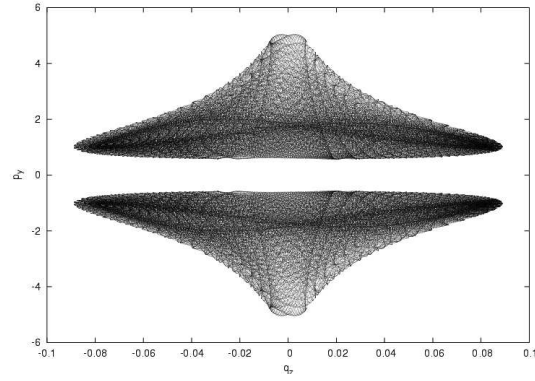


Figura 29: Proyecciones sobre (q_z, p_y) de $\Gamma_{L_1}^{s,1}(W^c)$ y $\Gamma_{L_2}^{u,1}(W^c)$.

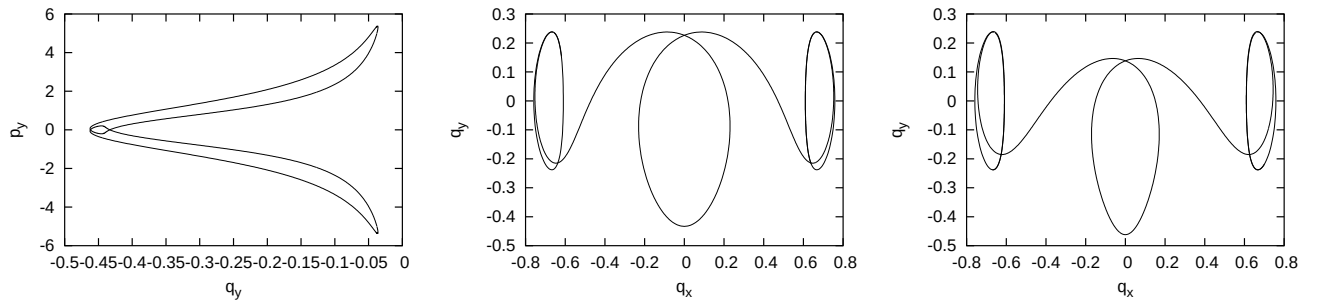


Figura 30: $\Gamma_{L_1}^{u,2}(p.p.o.) \cap \Gamma_{L_2}^{s,2}(p.p.o.)$.

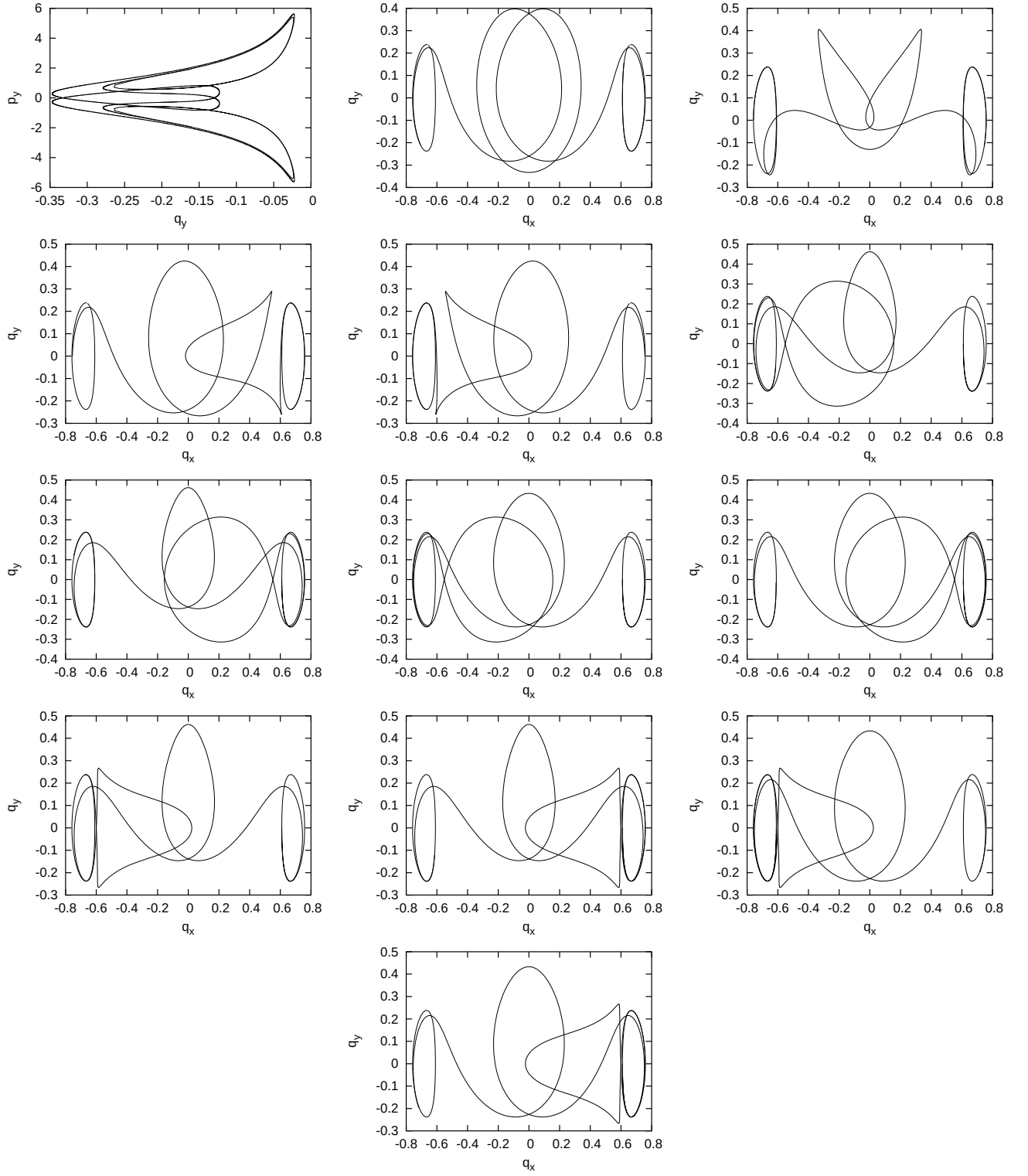


Figura 31: $\Gamma_{L_2}^{u,3}(p.p.o.) \cap \Gamma_{L_1}^{s,3}(p.p.o.)$.

CONCLUSIONES

- La combinación de métodos semianalíticos y numéricos permite obtener información no local del flujo de los problemas considerados (Hill y RTBP).
- Las dos aproximaciones, semianalítica y numérica, tienen sus propias limitaciones (convergencia, tiempo de CPU). Su combinación permite explorar un rango importante de energías.
- Se ha obtenido una descripción completa de las órbitas de libración en un entorno “grande” de los puntos de libración.
- El conocimiento del flujo alrededor de los puntos de libración, da flexibilidad al diseño de misiones espaciales a estos puntos (planes de contingencias).
- El conocimiento y aprovechamiento de la dinámica natural del problema (o de una buena aproximación) permite ahorros importantes de Δv en el diseño de misiones espaciales.