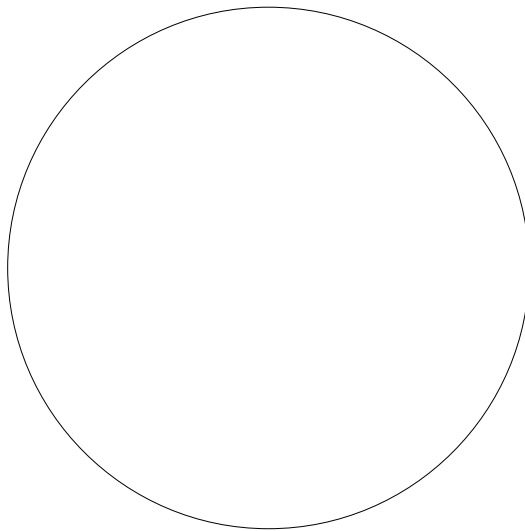


LA FUNCIÓN DE PERIODO

Sea X un campo polinomial (analítico) en $\mathbb{R}^2$. Decimos que un punto crítico p es un **centro** si existe un entorno U de manera que $U \setminus \{p\}$ está foliado de órbitas periódicas. El mayor de estos entornos “pinchados” se denomina el **period annulus** $\mathcal{A}$ de p . La **función de periodo** de p es la aplicación que asigna a cada órbita periódica en $\mathcal{A}$ su periodo. De ésta nos interesa estudiar:

- Isocronicidad.
- Monotonía.
- Número (disposición) de periodos críticos.
- Bifurcación de periodos críticos.

Consideremos la extensión $\tilde{X}$ de X a la esfera de Poincaré S^2 . (Localmente esta extensión es de la forma $\tilde{X} = fY$ donde f es una función meromorfa y Y es un campo vectorial analítico.) En la esfera de Poincaré el period annulus $\mathcal{A}$ tiene dos componentes: el centro p y un **policiclo** que denotaremos por $\mathcal{P}$. Si $\mathcal{A}$ no está acotado entonces el policiclo $\mathcal{P}$ tiene **vértices** en el ecuador $S^1 \subset S^2$. Los vértices de $\mathcal{P}$ en $S^2 \setminus S^1$ diremos que están **a distancia finita**.



Para estudiar la función de periodo es necesario tener parametrizado el conjunto de órbitas periódicas en $\mathcal{A}$. Por ejemplo, mediante una sección transversal analítica $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) \in \mathcal{P}$. Entonces

$$s \longmapsto T(s) := \text{periodo de la o.p de } X \text{ que passa por } \gamma(s)$$

es una función analítica en $s \in (0, 1)$.

Si el centro es **no degenerado** disponemos de una **parametrización local** de manera natural. Efectivamente, mediante una transformación afín y un rescalado constante del tiempo,

$$X \implies \begin{cases} \dot{r} = R(r, \theta) \\ \dot{\theta} = \Theta(r, \theta) \end{cases} \quad \text{con } R(0, r) = 0 \text{ y } \Theta(r, \theta) = 1 + \dots$$

Entonces, para $x \in (0, \varepsilon)$, podemos considerar la función de periodo

$$x \longmapsto T(x) := \text{periodo de la o.p. de } X \text{ que pasa por } (x, 0).$$

Además, si $r(\theta; x)$ es la solución de

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{R(r, \theta)}{\Theta(r, \theta)}$$

con condición inicial $r(0; x) = x$, tenemos que

$$T(x) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\Theta(r(\theta; x), \theta)}.$$

Claramente, esta función se puede extender analíticamente a $x = 0$ poniendo $T(0) := 2\pi$. En particular esto muestra que si hay periodos críticos acumulándose en $x = 0$ entonces el centro es isócrono. En este caso decimos que la función **no oscila cerca del centro**.

FINITUD DEL NUMERO DE PERIODOS CRÍTICOS

En el interior del period annulus no hay tampoco acumulación de periodos críticos porque la función de periodo es analítica. ¿Pueden acumularse en el políciclo?

Teorema 1 (Chicone-Dumortier). *Si X es analítico y $\mathcal{A}$ es acotado entonces no se acumulan periodos críticos en el políciclo.*

Observación (a) Para probar este resultado los autores muestran primero que después de un número finito de blow-ups el campo X es analíticamente conjugado a un campo de la forma fY donde f es una función analítica y Y es un campo analítico con el **políciclo desingularizado** (i.e., en los vértices sólo hay puntos críticos hiperbólicos o semi-hiperbólicos). Muestran luego que el tiempo de transición (y su derivada!!) asociado al paso de un sector hiperbólico de un políciclo desingularizado tiende a infinito.

(b) Si el period annulus es no acotado puede suceder que la función de periodo tienda a un valor finito.

□

Teorema 2 (Chicone-Dumortier). *Si X es un campo potencial polinomial entonces no se acumulan periodos críticos en el políciclo.*

Observación En este caso, si el políciclo no es acotado entonces es el ecuador de la esfera de Poincaré. A continuación, usando coordenadas hiperelípticas, prueban que la función de periodo tiene extensión analítica en el infinito. □

ENFOQUE UTILIZANDO DESARROLLOS ASINTÓTICOS

Consideramos una curva analítica $\gamma : (-\delta, \delta) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ transversal al políciclo con $\gamma(0) \in \mathcal{P}$ y sea $\Sigma = \gamma([0, \delta))$. Para cada $s \in (0, \delta)$ definimos

$$T(s) := \text{periodo de la o.p. de } X \text{ que pasa por } \gamma(s).$$

Esta función es analítica en su dominio pero podría no tener extensión analítica en $s = 0$. En particular, si $\mathcal{P}$ tiene algún vértice a distancia finita, claramente tenemos que $T(s) \longrightarrow +\infty$ cuando $s \longrightarrow 0^+$.

Sea $\tilde{X}$ el campo vectorial obtenido de desingularizar los vértices de $\mathcal{P}$ y sea $\tilde{\mathcal{P}}$ el políciclo resultante.

Hipótesis A *Los vértices del políciclo desingularizado $\tilde{\mathcal{P}}$ son sillas hiperbólicas orbitalmente $\mathcal{C}^\infty$ linearizables. Más concretamente, en un entorno de cada vértice existe un difeomorfismo Φ de clase $\mathcal{C}^\infty$ tal que*

$$\tilde{X} = \Phi_* \left(x^m y^n g(x, y) (x \partial_x - \lambda y \partial_y) \right),$$

donde $m, n \in \mathbb{Z}$, $\lambda > 0$ y g es una función $\mathcal{C}^\infty$ positiva.

Teorema 3 (Saavedra). *Si $(X, \mathcal{P})$ verifica la hipótesis A entonces la función de periodo T tiene un desarrollo asintótico $\hat{T}$ (lineal en $\log$) dado por*

$$(1) \quad \hat{T}(s) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k s^{\mu_k} + \log s \sum_{k \in \mathbb{N}} \beta_k s^{\delta_k}, \quad s > 0,$$

donde $\alpha_k, \beta_k, \mu_k, \delta_k \in \mathbb{R}$ y las sucesiones $\{\mu_k\}$ y $\{\delta_k\}$ son estrictamente crecientes y no acotadas. El desarrollo asintótico de la derivada T' es $\hat{T}'$, la derivada formal de $\hat{T}$.

Observación (a) Decimos que el desarrollo $\hat{T}$ es asintótico a T porque

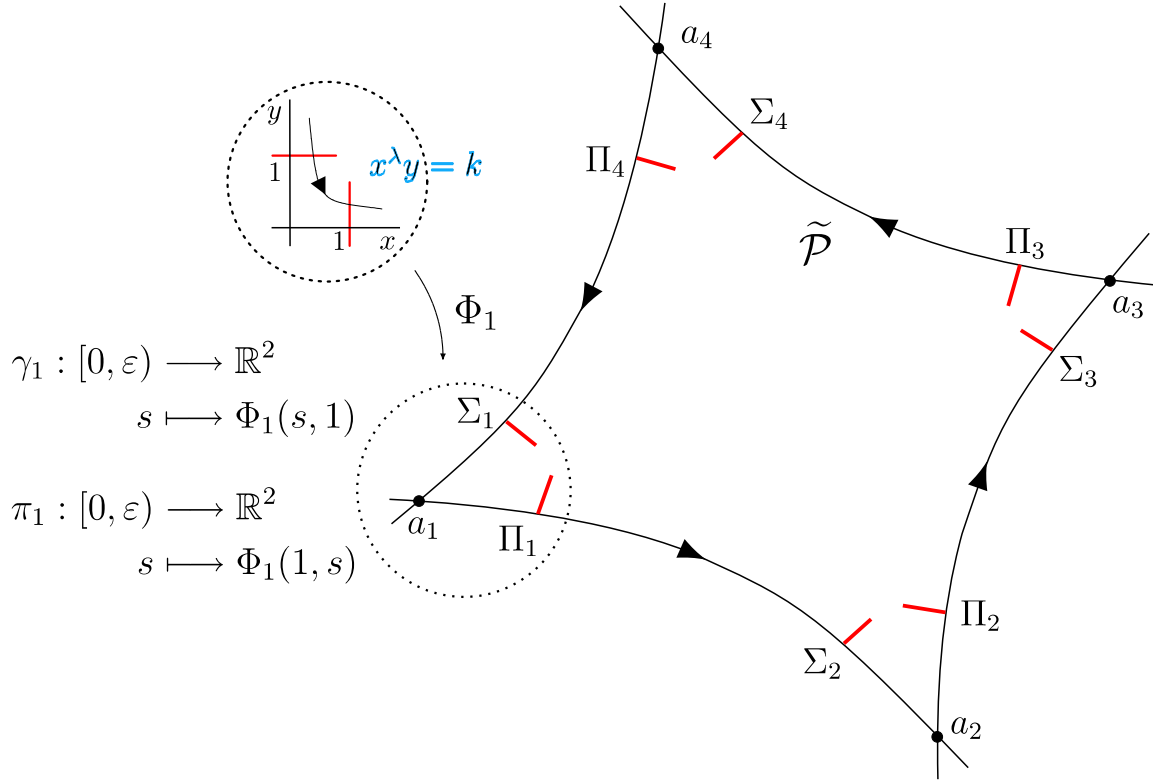
$$T(s) = \sum_{k=1}^n \alpha_k s^{\mu_k} + \log s \sum_{k=1}^n \beta_k s^{\delta_k} + o(s^{\min\{\mu_n, \delta_n\}}) \quad \text{para todo } n.$$

- (b) Si hay algún coeficiente α_k o β_k distinto de cero entonces la función de periodo no oscila cerca del políciclo.
- (c) La hipótesis A se verifica si el campo X tiene una integral primera de tipo Darboux $I = f_1^{\gamma_1} f_2^{\gamma_2} \dots f_r^{\gamma_r}$ con $\gamma_i \in \mathbb{R}$ y $f_i \in \mathbb{R}[x, y]$.
- (d) No hace falta que el políciclo $\mathcal{P}$ sea frontera de un period annulus, es suficiente con que este definido un retorno.

□

Corolario 1. *Si $(X, \mathcal{P})$ verifica la hipótesis A y $\mathcal{P}$ tiene como mínimo un vértice a distancia finita entonces el primer término de la serie (1) es s^α con $\alpha < 0$ o bien $s^\beta \log s$ con $\beta \leq 0$. En particular no se acumulan periodos críticos en el políciclo.*

I. Reducción a un **problema local** utilizando secciones “linearizantes”:



$$T(s) = \sum_{k=1}^4 \sigma_k(R_k(s)) + \sum_{k=1}^4 \tau_k(S_k(s))$$

donde:

1. La aplicación $s \longmapsto R_k(s)$ está definida tal que la semiórbita positiva de $\tilde{X}$ del punto $\gamma_1(s) \in \Sigma_1$ corta a Σ_k en $\gamma_k(R_k(s))$.
2. La aplicación $s \longmapsto S_k(s)$ está definida tal que la semiórbita positiva de $\tilde{X}$ del punto $\gamma_1(s) \in \Sigma_1$ corta a Π_k en $\pi_k(S_k(s))$.
3. σ_k es la aplicación “tiempo de paso” de Σ_k a Π_k (i.e., por el vértice a_k).
4. τ_k es la aplicación “tiempo de paso” Π_k a Σ_{k+1} .

II. Desarrollo asintótico del tiempo de paso por un vértice:

El tiempo de paso por un vértice viene dado por

$$\sigma(s) = \int_{\mathcal{C}_s} \frac{1}{x^m y^n g(x, y)} \frac{dx}{x}$$

donde $\mathcal{C}_s := \{(x, y) : y = (s/x)^\lambda, s \leq x \leq 1\}$.

Más en general, dados $i, j \in \mathbb{Z}$ y una función $\mathcal{C}^\infty$ positiva F , estudiamos

$$V(s) := \int_{\mathcal{C}_s} x^i y^j F(x, y) \frac{dx}{x}.$$

$i - \lambda j < 0$ Ponemos $F(x, y) = F(0, y) + xG(x, y)$ y entonces

$$V(s) = \underbrace{s^{\lambda j} \int_s^1 x^{i-\lambda j} F(0, (s/x)^\lambda) \frac{dx}{x}}_{A(s)} + \underbrace{\int_{\mathcal{C}_s} x^{i+1} y^j G(x, y) \frac{dx}{x}}_{B(s)}.$$

Con el cambio $u = s/x$ obtenemos

$$\begin{aligned} A(s) &= s^i \int_s^1 u^{\lambda j - i} F(0, u^\lambda) \frac{du}{u} \\ &= s^i \int_0^1 u^{\lambda j - i} F(0, u^\lambda) \frac{du}{u} - s^i \int_0^s u^{\lambda j - i} F(0, u^\lambda) \frac{du}{u} \end{aligned}$$

y utilizando el desarrollo de Taylor de $y \mapsto F(0, y)$ en $y = 0$ concluimos que $\hat{A}(s) = \alpha s^i + \sum_{k \geq j} \beta_k s^{\lambda k}$. Se puede mostrar por otro lado que $B(s) = o(s^i)$.

$i - \lambda j = 0$ Poniendo $F(x, y) = F(0, 0) + xg_1(x) + yg_2(y) + xyG(x, y)$,

$$V(s) = -G(0, 0)s^i \log s + \underbrace{s^i \int_s^1 (g_1(u) + u^{\lambda-1} g_2(u^\lambda)) du}_{A(s)} + \underbrace{\int_{\mathcal{C}_s} x^{i+1} y^{j+1} G(x, y) \frac{dx}{x}}_{B(s)}.$$

Igual que antes se puede mostrar que $\hat{A}(s) = \alpha s^i + \sum_{k \geq i+1} \beta_k s^k + \sum_{k \geq j+1} s^{\lambda k}$ y que $B(s) = o(s^i)$.

$i - \lambda j > 0$ Se reduce al primer caso con $(x, y) \mapsto (y, x)$.

Hipótesis B *Los vértices del políciclo desingularizado $\tilde{\mathcal{P}}$ son sillas hiperbólicas orbitalmente $\mathcal{C}^\omega$ linearizables. Más concretamente, en un entorno de cada vértice existe un difeomorfismo Φ analítico tal que*

$$\tilde{X} = \Phi_* \left(x^m y^n g(x, y) (x \partial_x - \lambda y \partial_y) \right),$$

donde $m, n \in \mathbb{Z}$, $\lambda > 0$ y g es una función analítica positiva.

Teorema 4 (Saavedra). *Si $(X, \mathcal{P})$ verifica la hipótesis B entonces las series $\hat{T}$ y $\hat{T}'$ convergen absoluta y uniformemente a T y T' respectivamente.*

Observación La hipótesis B se verifica si el campo X tiene una integral primera de tipo Darboux $I = f_1^{\gamma_1} f_2^{\gamma_2} \dots f_r^{\gamma_r}$ con $\gamma_i \in \mathbb{Q}$ y $f_i \in \mathbb{R}[x, y]$. $\square$

Corolario 2. *Si X tiene una integral primera racional entonces no se acumulan periodos críticos en el políciclo.*

Observación Por lo que respecta al desarrollo asintótico, falta considerar los casos en los que algún vértice del políciclo desingularizado $\tilde{\mathcal{P}}$ sea una silla hiperbólica no linearizable o un punto crítico semi-hiperbólico. En el primer caso $\lambda \in \mathbb{Q}$ y poniendo $\lambda = p/q$ con $(p, q) = 1$, la silla es equivalente a

$$qx(1 + \alpha u^k) \partial_x - py(1 + \beta u^k) \partial_y$$

para algún $k \in \mathbb{N}$ y donde $u := x^p y^q$. $\square$

BIBLIOGRAFÍA

1. C. Chicone y F. Dumortier, *Finiteness for critical periods of planar analytic vector fields*, Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. **20** (1993) 315–335.
2. M. Saavedra, *Développement asymptotique de la fonction période*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **319** (1994), 563–566.
3. M. Saavedra, *Fonction temps de retour d'un polycycle*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **330** (2000), 781–784.
4. M. Saavedra, *Asymptotic expansion of the period function*, J. Differential Equations **193** (2002), 359–373.
5. C. Christopher, P. Mardešić y C. Rousseau, *Normalizable, integrable, and linearizable saddle points for complex quadratic systems in $\mathbb{C}^2$* , J. Dynam. Control Systems **9** (2003), 311–363.

NÚMERO Y DISPOSICIÓN DE PERIODOS CRÍTICOS

Para fijar las ideas, sea $P(x) = \frac{1}{2}x^2 + \beta_3x^3 + \beta_4x^4 + \dots + \beta_{n+1}x^{n+1}$ con $\beta_{n+1} \neq 0$ y consideremos el sistema Hamiltoniano asociado a $H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + P(x)$, i.e.,

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -P'(x). \end{cases}$$

El punto crítico en el origen es un centro no degenerado y su función de periodo, utilizando el nivel de energía como parametrización, viene dada por

$$T(h) = \int_{\gamma_h} \frac{dx}{y},$$

donde γ_h es la componente de $H = h$ dentro de $\mathcal{A}$.

La derivada de una [integral abeliana](#) $\int_{\gamma_h} \omega$ se puede calcular integrando sobre la misma curva otra 1-forma θ llamada [derivada de Gelfand-Leray](#). Más concretamente, denotando con Λ^k el conjunto de k -formas de $\mathbb{C}[x, y]$:

Lema 1. *Para cualquier $H \in \mathbb{C}[x, y]$, si $\omega, \theta \in \Lambda^1$ verifican $d\omega = dH \wedge \theta$ entonces*

$$\frac{d}{dh} \int_{\gamma_h} \omega = \int_{\gamma_h} \theta$$

para todo óvalo $\gamma_h \subset \{H = h\}$.

Observación (a) La identidad $d\omega = dH \wedge \theta$ explica la notación $\theta = \frac{d\omega}{dH}$. En general esta *división* no es posible dentro de Λ^1 , pero siempre se puede dividir $d\omega$ entre dH con un *resto*.

(b) Bajo ciertas condiciones este resultado también es válido cuando θ es sólo meromorfa. Por ejemplo, si $H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + P(x)$ entonces

$$\frac{d}{dh} \int_{\gamma_h} y dx = \int_{\gamma_h} \frac{dx}{y},$$

i.e., el periodo es la derivada del área.

□

Teniendo presente esta observación, tomando

$$I_i(h) = \int_{H=h} \omega_i \text{ con } \omega_i := x^{i-1} y dx,$$

encontraremos primero un [sistema de Picard-Fuchs](#) para $I = (I_1, \dots, I_n)^t$.

$$Hd\omega_i = \left(\frac{1}{2} y^2 + P(x) \right) x^{i-1} dy \wedge dx = \left(\frac{1}{2} x^{i-1} y H_y + \boxed{x^{i-1} P(x)} \right) dy \wedge dx$$

$$= a_i(x) dy \wedge dx + \left(b_i(x) dy - \frac{1}{2} \boxed{x^{i-1} y dx} \right) \wedge dH$$

$$= \sum_{j=1}^n a_{ij} \boxed{x^{j-1} dy \wedge dx} + \left(dF_i - \sum_{j=1}^i b_{ij} \boxed{x^{j-1} y dx} - \frac{1}{2} \omega_i \right) \wedge dH$$

$$= \sum_{j=1}^n a_{ij} d\omega_j + dH \wedge \left(\frac{1}{2} \omega_i + \sum_{j=1}^i b_{ij} \omega_j - dF_i \right)$$

De este modo, debido a que $Hd\omega_i = d(H\omega_i) - dH \wedge \omega_i$, obtenemos

$$d \left(H\omega_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} \omega_j \right) = dH \wedge \left(\frac{3}{2} \omega_i + \sum_{j=1}^i b_{ij} \omega_j - dF_i \right).$$

Usando la derivada de Gelfand-Leray tenemos

$$\frac{d}{dh} \int_{\gamma_h} \left(H\omega_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} \omega_j \right) = \int_{\gamma_h} \left(\frac{3}{2} \omega_i + \sum_{j=1}^i b_{ij} \omega_j - dF_i \right)$$

y por tanto

$$\frac{d}{dh} \left(hI_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} I_j \right) = \frac{3}{2} I_i + \sum_{j=1}^i b_{ij} I_j.$$

Derivando obtenemos

$$h\dot{I}_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{I}_j = \frac{1}{2} I_i + \sum_{j=1}^i b_{ij} I_j, \quad \text{para } i = 1, \dots, n.$$

En resumen, expresado matricialmente,

$$(2) \quad (hId - A) \dot{I}(h) = \left(\frac{1}{2} Id + B \right) I(h),$$

donde

$$I = (I_1, \dots, I_n)^t \quad A = (a_{ij}) \quad B = \begin{pmatrix} \diagdown & 0 \\ b_{ij} & \diagdown \end{pmatrix}$$

Observación (a) Los coeficientes de las matrices A y B se obtienen de la división $x^{i-1}P(x) = b_i(x)P'(x) + a_i(x)$ poniendo

$$a_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x^{j-1} \quad \text{y} \quad b'_i(x) = \sum_{j=1}^i b_{ij} x^{j-1}.$$

- (b) Si $x_0 \in \mathbb{C}$ es un punto crítico de P y $h_0 = P(x_0)$ entonces $(1, x_0, x_0^2, \dots, x_0^{n-1})^t$ es un vector propio de A de valor propio h_0 .
- (c) El sistema de Picard-Fuchs $\dot{I}(h) = \mathcal{R}(h)I(h)$ se obtiene de (2) multiplicando por $(hId - A)^{-1}$. Así $\mathcal{R}(h)$ es una matriz racional que, por la observación anterior, si H es una **función Morse** entonces tiene sólo polos simples.
- (d) Las propiedades de $\mathcal{R}$ se estudian para obtener cotas uniformes del numero de ceros de ciertas **integrales abelianas** (Tangential Hilbert 16th problem).

□

Para estudiar la función de periodo tomamos

$$L_i(h) = \int_{\gamma_h} \theta_i \quad \text{con } \theta_i := \frac{x^{i-1} dx}{y} \quad i = 1, \dots, n.$$

Entonces, debido a que $d\omega_i = dH \wedge \theta_i$, se verifica $\dot{L}_i = I_i$ y derivando el sistema (2) obtenemos

$$\left(hId - A\right) \dot{L}(h) = \left(B - \frac{1}{2} Id\right) L(h) \quad \text{con } L := (L_1, \dots, L_n)^t.$$

Esto es,

$$(3) \quad L'(h) = \mathcal{F}(h)L(h) \quad \text{donde } \mathcal{F}(h) := \left(hId - A\right)^{-1} \left(B - \frac{1}{2} Id\right).$$

Igual que antes $\mathcal{F}(h)$ es una matriz $n \times n$ racional.

Finalmente queremos pasar de este sistema diferencial lineal n -dimensional a una [ecuación diferencial lineal](#) de orden n que tenga $T(h) = L_1(h)$ como solución. Una manera de hacer esto es el siguiente. Derivando sucesivamente la relación (3) concluimos que

$$(4) \quad L^{(k)}(h) = \mathcal{F}_k(h)L(h)$$

donde $\mathcal{F}_k$ es una matriz $n \times n$ definida de manera recursiva mediante

$$\mathcal{F}_k(h) = \mathcal{F}_{k-1}'(h) + \mathcal{F}_{k-1}(h)\mathcal{F}(h) \quad \text{con } \mathcal{F}_0 = Id.$$

Notar que si $v_k \in \mathbb{C}^n$ es la primera fila de la matriz $\mathcal{F}_k$ entonces de (4)

$$(5) \quad T^{(k)}(h) = \langle v_k(h), L(h) \rangle.$$

Por otro lado, debido a que $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ es un sistema linealmente dependiente, tenemos que

$$p_0(h)v_0(h) + p_1(h)v_1(h) + \dots + p_n(h)v_n(h) = \mathbf{0} \in \mathbb{C}^n$$

para ciertos $p_i \in \mathbb{C}[h]$. Por tanto de (5) concluimos que

$$\begin{aligned} 0 &= p_n(h) \langle v_n(h), L(h) \rangle + \dots + p_0(h) \langle v_0(h), L(h) \rangle \\ &= p_n(h) T^{(n)}(h) + \dots + p_1(h) T'(h) + p_0(h) T(h). \end{aligned}$$

EJEMPLO

Para el sistema potencial asociado a $P(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{a}{4}x^4 + \frac{b}{6}x^6$ obtenemos

$$(6) \quad p_2(h)T''(h) + p_1(h)T'(h) + p_0(h)T(h) = 0,$$

donde los coeficientes p_i son los polinomios

$$P_2(h) = (12abh + 16b - 3a^2)(144b^2h^2 + 12a(6b - a^2)h + 16b - 3a^2)h,$$

$$P_1(h) = 3456ab^3h^3 + 144b(48b^2 - 3a^2b - a^4)h^2 + 24a(6b - a^2)(16b - 3a^2)h + (16b - 3a^2)^2,$$

$$P_0(h) = 384ab^3h^2 + b(80b - 3a^2)(16b - 3a^2)h + \frac{3}{4}a(16b - 3a^2)^2.$$

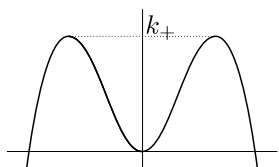
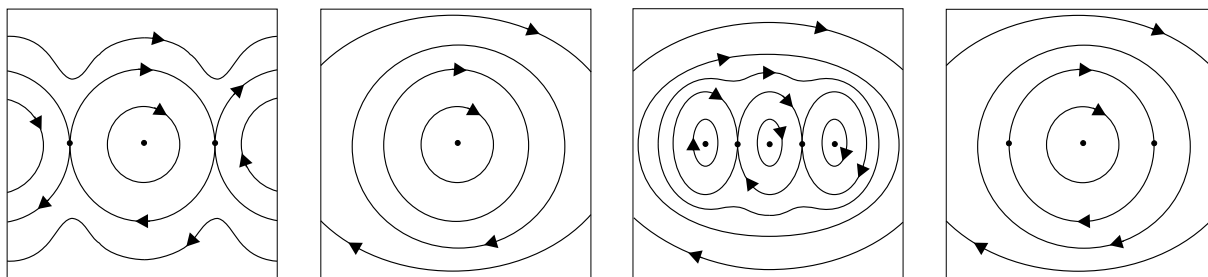
Considerando $x(h) := \frac{T'(h)}{T(h)}$ pasamos de la ecuación de segundo orden (6) a

$$p_2(h)x'(h) + p_2(h)x^2(h) + p_1(h)x(h) + p_0(h) = 0,$$

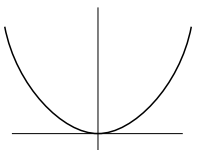
y por tanto ahora el objetivo es estudiar los ceros de $h \mapsto x(h)$. En lugar de esta ecuación de Ricatti estudiamos un sistema autónomo equivalente:

$$\begin{cases} \dot{h} = -p_2(h), \\ \dot{x} = p_2(h)x^2 + p_1(h)x + p_0(h). \end{cases}$$

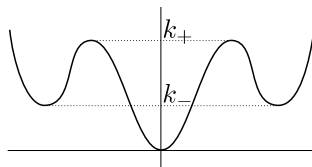
La idea consiste en primero identificar cual de las soluciones de este sistema se corresponde con la función de periodo, y luego estudiar cuantos veces esta solución corta con $x = 0$.



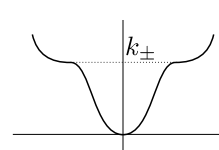
(a) $b < 0$.



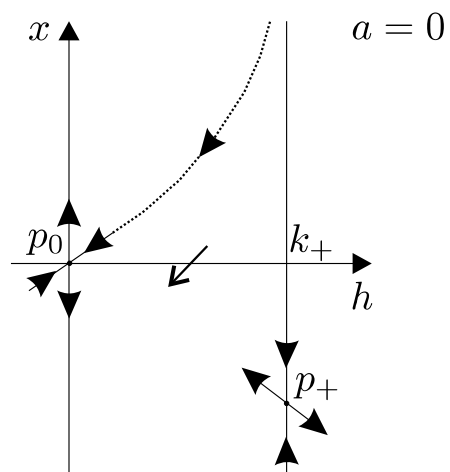
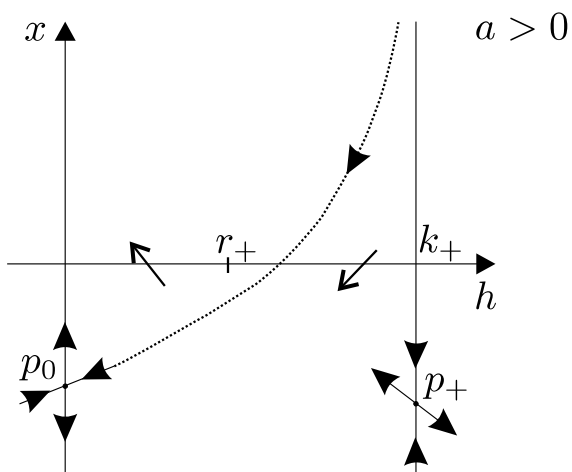
(b) $b > 0, a > -2\sqrt{b}$.

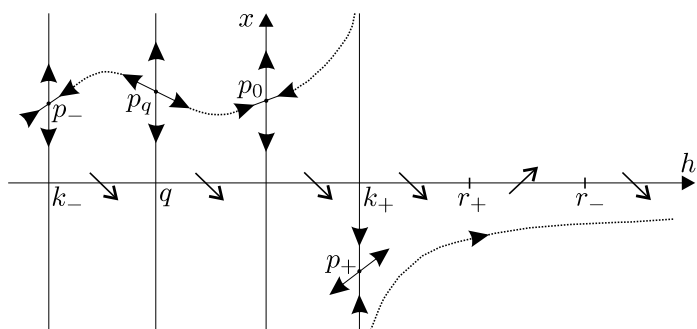
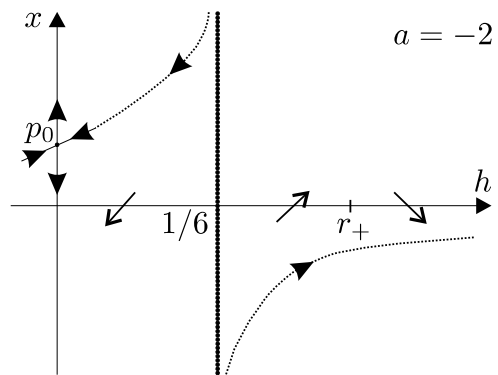
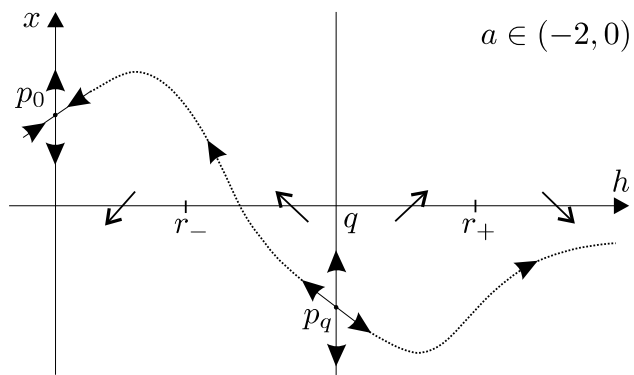


(c) $b > 0, a < -2\sqrt{b}$.

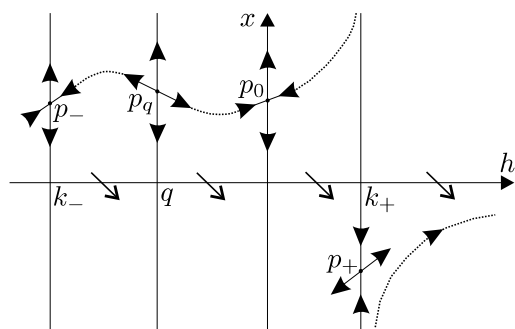


(d) $b > 0, a = -2\sqrt{b}$.

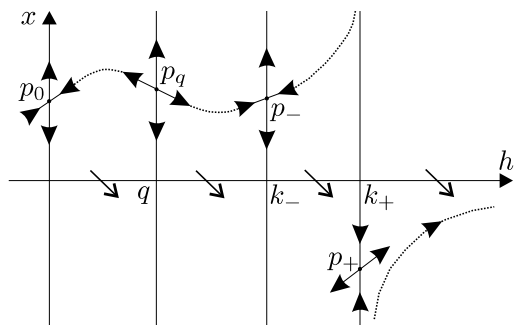




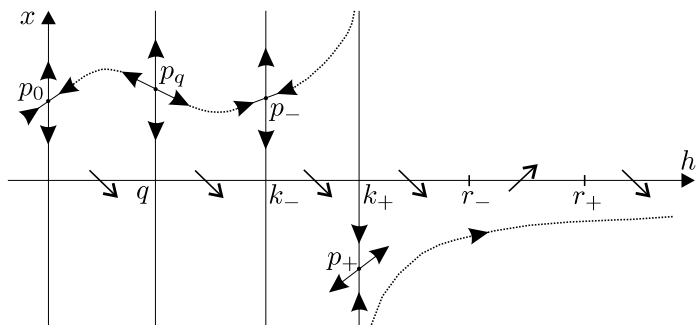
$a \in (-\infty, -a_4)$



$a \in (-a_4, -a_3)$



$a \in (-a_3, -a_2)$



$a \in (-a_2, -2)$

BIBLIOGRAFÍA

1. S. Chow y J. Sanders, *On the number of critical points of the period*, J. Differential Equations **64** (1986), 51–66.
2. L. Gavrilov, *Remark on the number of critical points of the period*, J. Differential Equations **101** (1993), 58–65.
3. A.B. Givental, *Sturm's theorem for hyperelliptic integrals*, (Russian) Algebra i Analiz **1** (1989), 95–102 (translation in Leningrad Math. J. **1** (1990), 1157–1163).
4. M. Roitman y S. Yakovenko, *On the number of zeros of analytic functions in a neighborhood of a Fuchsian singular point with real spectrum*, Math. Res. Lett. **3** (1996), 359–371.
5. D. Novikov y S. Yakovenko, *Redundant Picard-Fuchs system for Abelian integrals*, J. Differential Equations **177** (2001), 267–306.