

DINÁMICA DE PARTÍCULAS

EN CAIDA LIBRE SOBRE

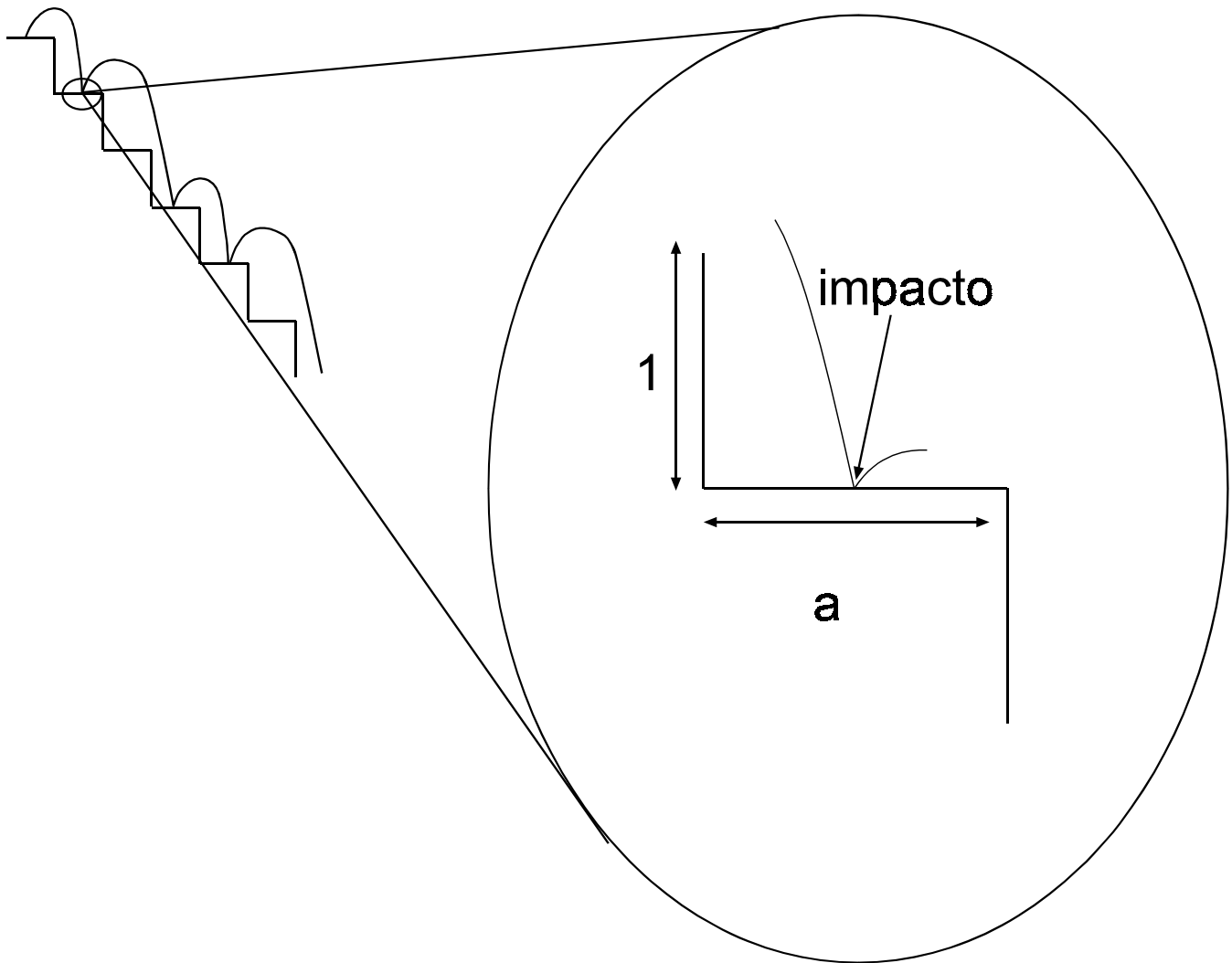
PERFILES ESCALONADOS

M^a José Romero Vallés
Universidad de Granada

Colaboradores:

- J. Campos (Universidad de Granada)
- P.J. Torres (Universidad de Granada)
- J.J.P. Veerman (Portland University, USA)

MODELO PRINCIPAL



$$y'' = -\frac{1}{2},$$

$$y > -E\left(\frac{t}{a}\right)$$

$$y'(t^+) = -ey'(t^-), \quad y(t) = -E\left(\frac{t}{a}\right)$$

$$e \in (0,1)$$

BIBLIOGRAFÍA

“ Dynamics of a granular particle on a rough surface with a staircase profile”

J.J.P. Veerman , F.V. Cunha,Jr. ,
G.L. Vasconcelos

Physica D168/169 220-234, 2002

“Dynamics of a ball bouncing on a rough inclined line”

A.Valance, D. Bideau

Phys. Rev. E 57 1886-1894, 1998

SOLUCIONES DESLIZANTES

- SALTANDO SIN ESCALERA ($a=\infty$)

El modelo:

$$\begin{array}{l} y'' = -\frac{1}{2} \quad , \quad y > 0 \\ y'(t^+) = -ey'(t^-) \quad , \quad y = 0 \end{array}$$

Prop:

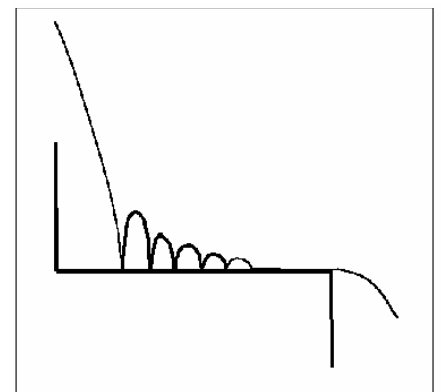
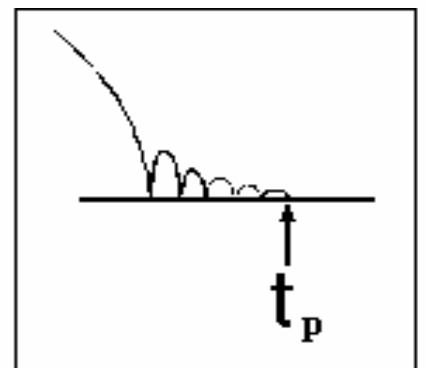
El tiempo entre dos impactos consecutivos forma una ley geométrica de razón $e < 1$ y en consecuencia, para toda solución $y(t)$ existe un tiempo de parada t_p . Es decir,

$\exists t_p > 0$ tal que $y(t), y'(t) \rightarrow 0 \quad t \rightarrow t_p$

$e \quad y(t) \equiv 0 \quad \forall t \geq t_p$

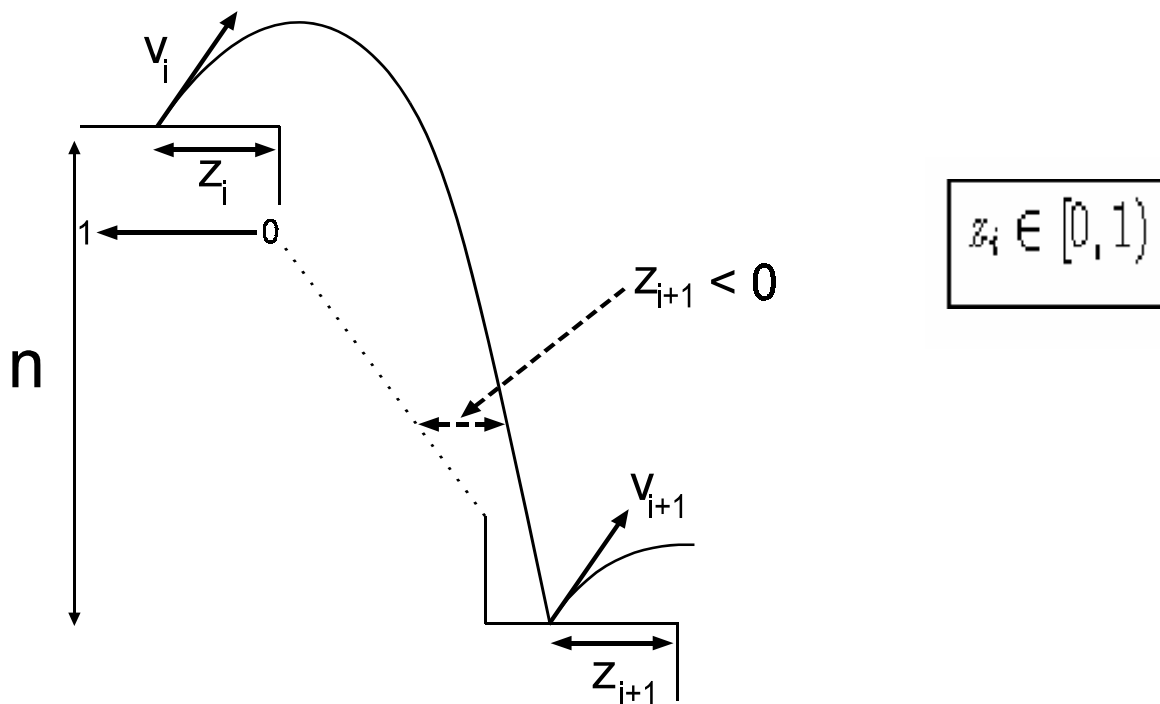
Modelo principal

Observación: En nuestro modelo existen soluciones que encuentran su tiempo de parada tras botar varias infinitas veces en el mismo escalón. En este caso, continuamos la solución por cero hasta la esquina, esto representa que la partícula desliza debido a la velocidad horizontal.



MODELO DISCRETO

$$u = \frac{1}{a} \quad \text{pendiente de la escalera}$$



$$v_{i+1} = e \sqrt{v_i^2 + n}$$

$$z_{i+1} = z_i + n - 2u \left(v_i + \sqrt{v_i^2 + n} \right)$$

donde :

- $n=0$ si $z_i \geq 4uv_i$
- el primer $n \in \mathbb{N}$ tal que
 $z_{i+1}(n) \geq 0$, en otro caso

□ número de escalones

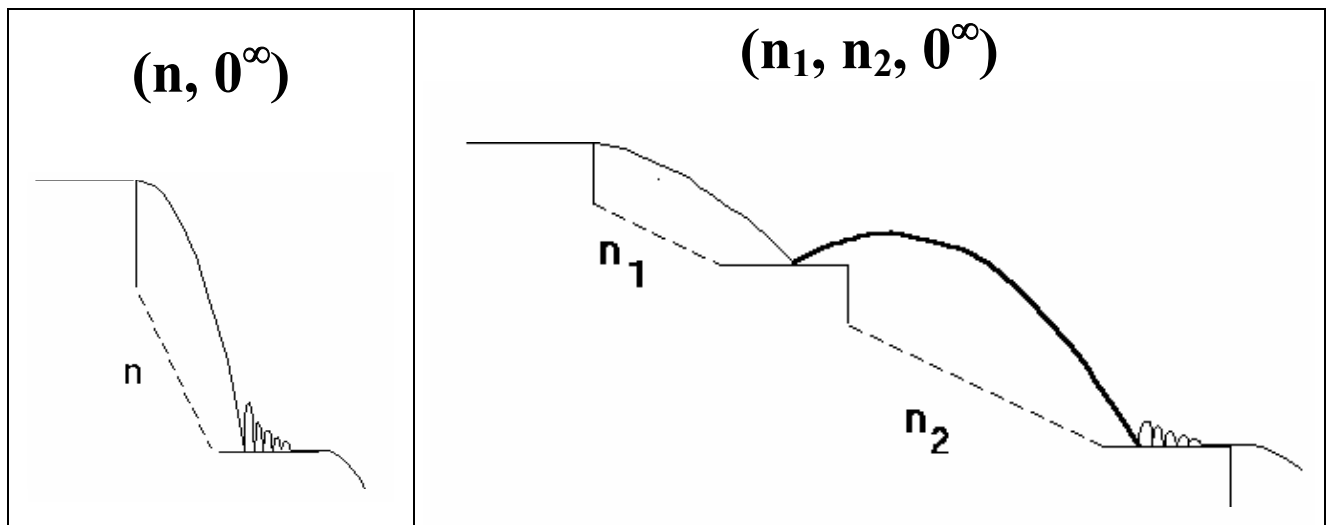
SOLUCIONES PERIÓDICAS

Def: Diremos que una solución $y(t)$ del modelo principal es **periódica** si $y(t)-E(ut)$ es periódica.

Def: Se define la **palabra asociada** a una solución periódica no deslizante, $(\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_n)$, como la correspondiente lista de saltos entre impactos consecutivos.

Obs: Denotaremos por $(\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_n, 0^\infty)$ a la palabra asociada a una solución periódica deslizante, siendo 0^∞ la acumulación de impactos en un mismo escalón.

PERÓDICAS DESLIZANTES

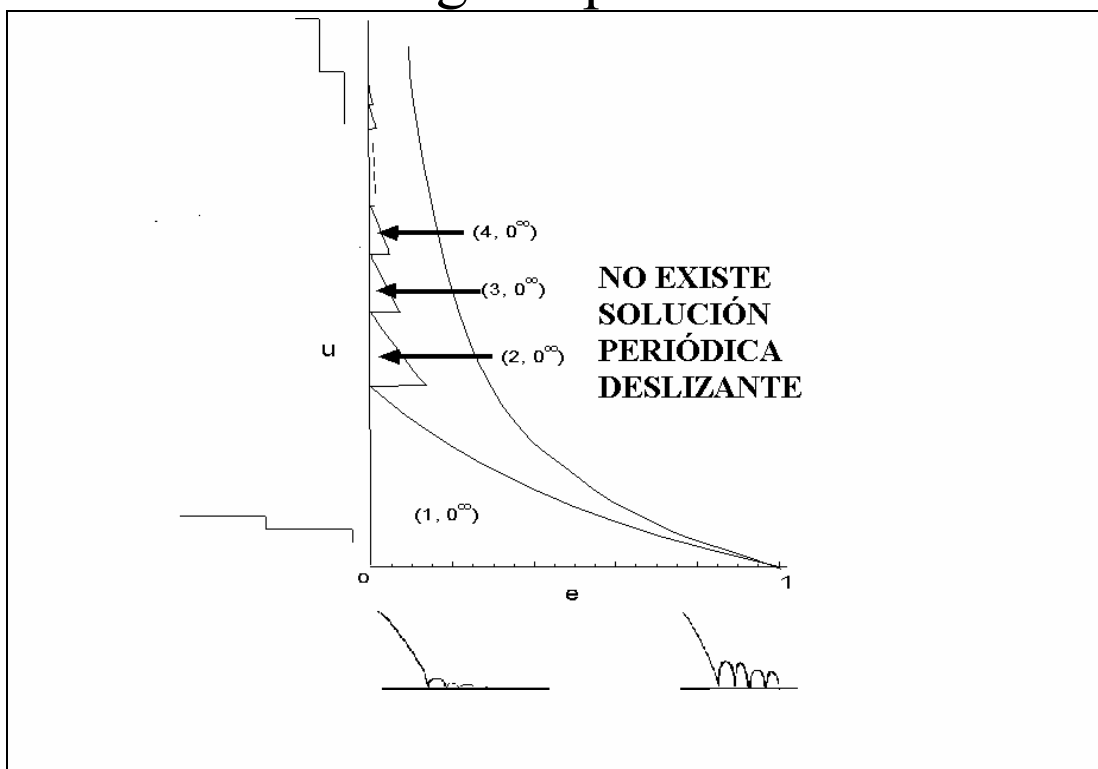


Teorema:

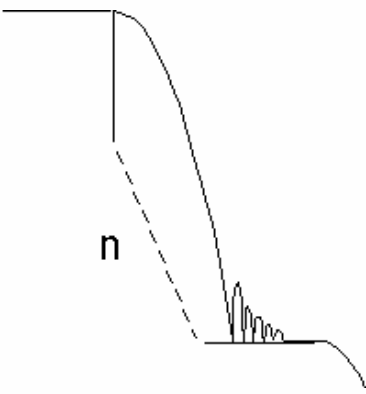
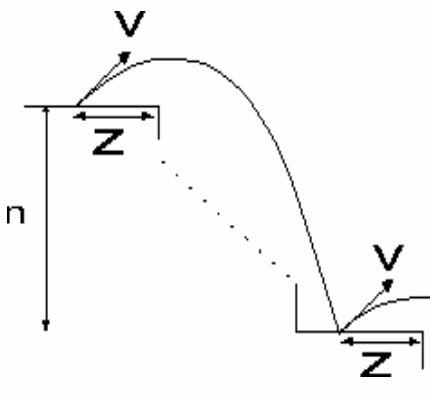
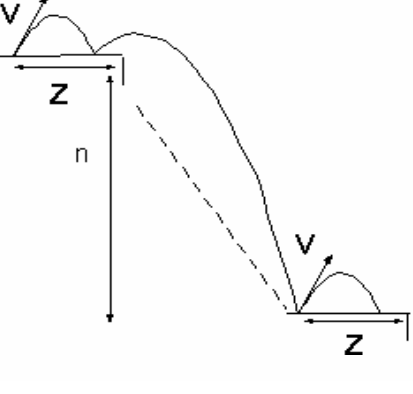
Existe solución periódica de tipo $(n, 0^{\infty})$ si
y sólo si $\frac{\sqrt{n-1}}{2} < u \leq \frac{\sqrt{n}}{2} \frac{1-e}{1+e}$

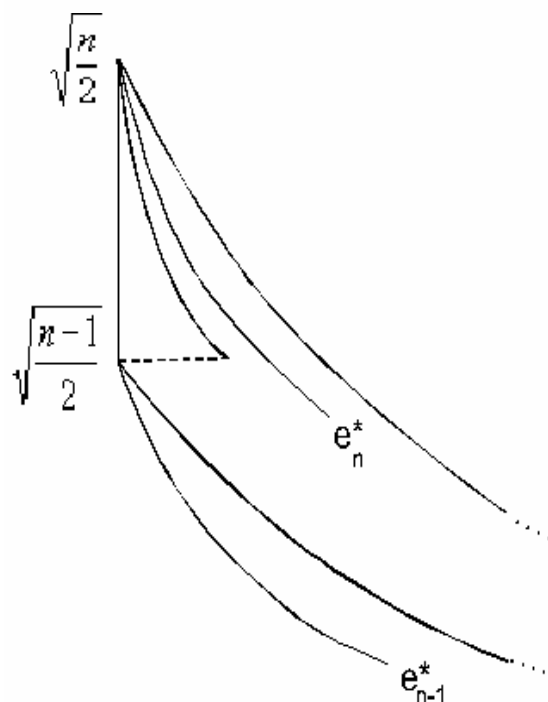
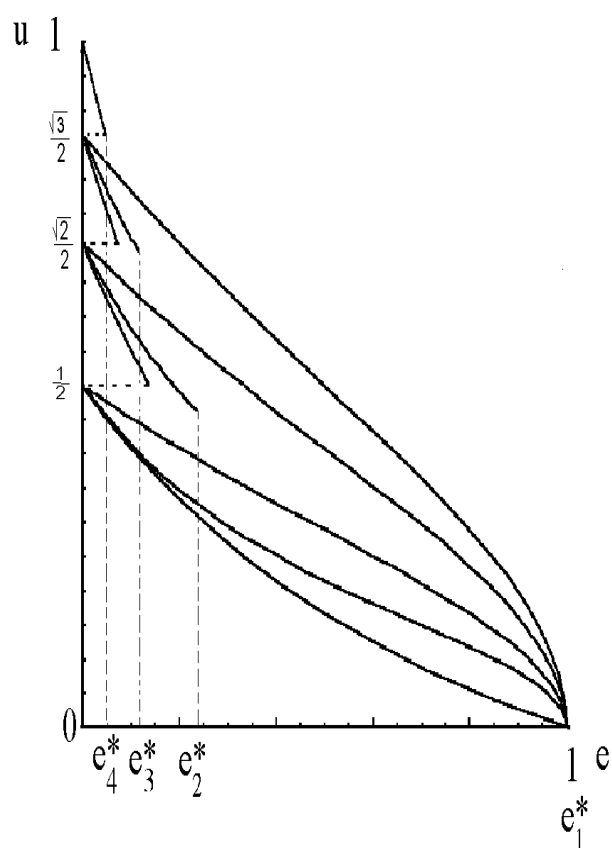
Teorema(límite de soluciones deslizantes):

Si $u > \frac{1-e}{4e}$ no existe solución periódica
deslizante de ningún tipo



EXISTENCIA DE ALGUNOS TIPOS DE SOLUCIONES PERIÓDICAS

TIPO $(n, 0^\infty)$	TIPO (n)	TIPO $(0, n)$
		
$\frac{\sqrt{n-1}}{2} < u \leq \frac{\sqrt{n} 1-e}{2 1+e}$ $\forall e \in (0, 1)$	$u = \frac{\sqrt{n} \sqrt{1-e}}{2 \sqrt{1+e}}$ $\forall e \in (0, 1)$	$u = \frac{\sqrt{n} \sqrt{1-e^4}}{2 (1+e)^2}$ $\forall e \in (0, e_n^*)$ $e_{n+1}^* < e_n^* \quad e_n^* \rightarrow 0$



EXISTENCIA

Teorema(*Condición necesaria de existencia*)

Existe solución periódica de palabra $(m_1, \dots, m_n)$ si :

$$u(e) = \frac{e}{2(e+1)f(e)} (m_1 + m_2 + \dots + m_n)$$

NO EXISTENCIA

Observación:

Existe solución periódica no deslizante a lo más en un conjunto numerable de curvas.

Corolario:

No existe solución periódica no deslizante para la mayoría de los parámetros. En consecuencia, existen grandes regiones en el espacio de parámetros sin ningún tipo de solución periódica.

ESTABILIDAD

Definición:

Diremos que una solución del sistema discreto es *estricta* si $z_k > 0 \forall k$

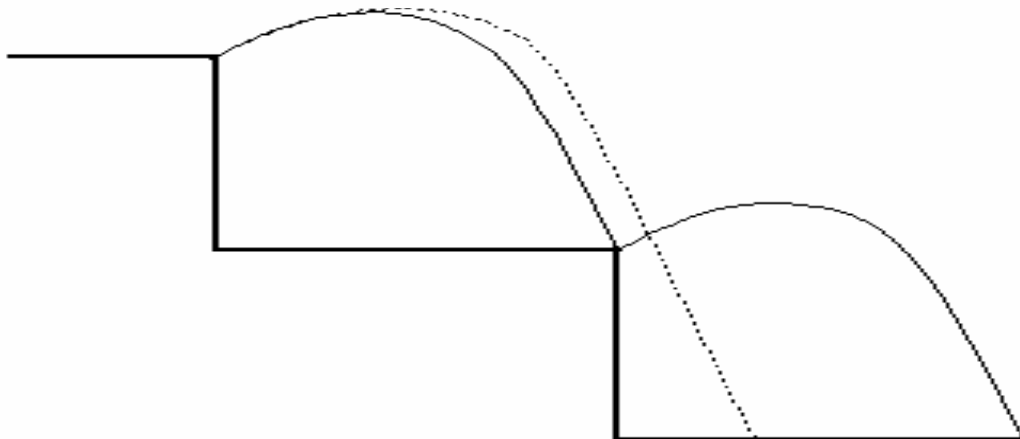
Es decir, si la partícula no salta en la esquina del peldaño.

Teorema(ESTABILIDAD):

Toda solución periódica estricta (no deslizante) es ESTABLE.

NOTA:

El *operador* es discontinuo sobre las soluciones no estrictas. Por tanto, toda solución periódica no estricta es INESTABLE .



DEMOSTRACIÓN ESTABILIDAD

Sean $(v_0^*, z_0^*), \dots, (v_k^*, z_k^*)$ las sucesivas iteradas de una solución periódica estricta no deslizante, cuya palabra asociada es $(m_1, \dots, m_k)$

Lema 1: Sea $\{(v_n, z_n)\}_n$ una solución del sistema discretizado con condición inicial (v_0, z_0) .

$\exists \delta > 0$ tal que si $|v_0 - v_0^*| < \delta, |z_0 - z_0^*| < \delta$ entonces la partícula salta exactamente $m_1, \dots, m_k$ peldaños entre los primeros k impactos.

Lema 2: Si dos soluciones tienen la misma palabra asociada hasta el k -ésimo impacto, entonces ambas soluciones permanecen cerca.

Mas aún, si $\{(v_n, z_n)\}_n$ y $\{(v_n^\bullet, z_n^\bullet)\}_n$ saltan la misma secuencia de escalones en los k primeros impactos, entonces:

$$(a) \quad |v_k - v_k^\bullet| \leq e^k |v_0 - v_0^\bullet|$$

$$(b) \quad |z_k - z_k^\bullet| \leq |z_0 - z_0^\bullet| + \frac{4u}{1-e} |v_0 - v_0^\bullet|$$

•) Problema de la acotación de soluciones.

①

Modelo discreto

$$v_{i+1} = e \sqrt{v_i^2 + h}$$

$$z_{i+1} = z_i + h - 2u (v_i + \sqrt{v_i^2 + h})$$

Proposición Existe $R := R(e, u)$ tal que para cualquier $(z_0, v_0) \in (0, 1) \times (0, +\infty)$,

$$\limsup_{i \rightarrow +\infty} v_i \leq R.$$

(2)

Demostración

Lema Existen α, β dependientes de u tales que

$$n \leq \alpha v + \beta$$

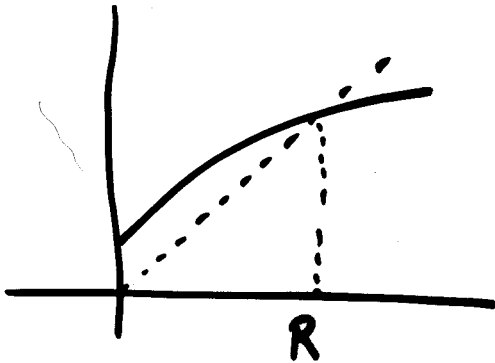
$\Rightarrow$ De la ecuación

$$n \leq 2 + 4uv + 2u\sqrt{n}$$

luego $n \leq \text{"raiz"}$

Dem de la Prop (cont)

$$V_{i+1} \leq e \sqrt{V_i^2 + \alpha v + \beta}$$



Nota El número de escalones está también acotado

Acotación de soluciones (sistema continuo)

(3)

$$y'' = -\frac{1}{2} \quad y > -E(ut) \quad u = \frac{1}{a}$$

$$y'(t^+) = -e y'(t^-) \quad y(t) = -E(ut)$$

Teorema Existe $R = R(u, e)$ tal que cualquier solución y verifica

$$y(t) - E(ut) \leq R$$

$$|y'(t)| \leq R \quad (\text{siempre que exista})$$

para t suficientemente avanzado.

Sistema impulso-impacto

9

Sea $d(t) = y(t) - E(ut)$ entonces

$$\begin{cases} d'' = -g & d(t) > 0 \quad t \notin u\mathbb{Z} \\ d'(t^+) = -e d'(t^-) & d(t) = 0 \\ d(t^+) = d(t^-) + 1 & t \in u\mathbb{Z} \end{cases}$$

"Sistema disipativo"

"Existen valores (e, u) sin ningún tipo de solución periódica"

El operador retorno

Dado $(d_0, d'_0) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow P(d_0, d'_0) = (d(u^+), d'(u^+))$

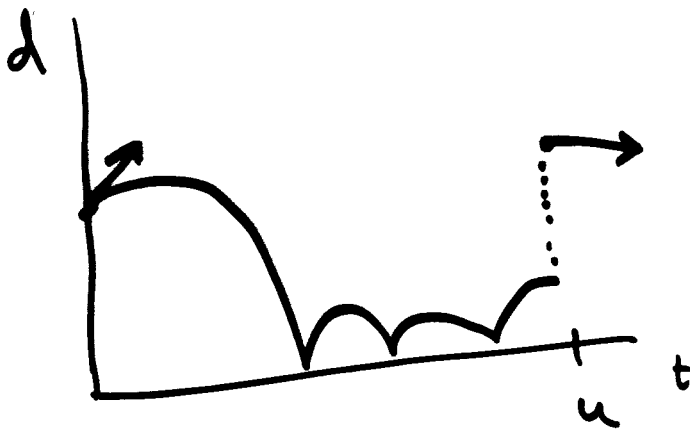
donde $d(t)$ es la solución verificando

$$d(0^+) = d_0$$

$$d'(0^+) = d'_0$$

Nota: P puede extenderse a $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$ pero

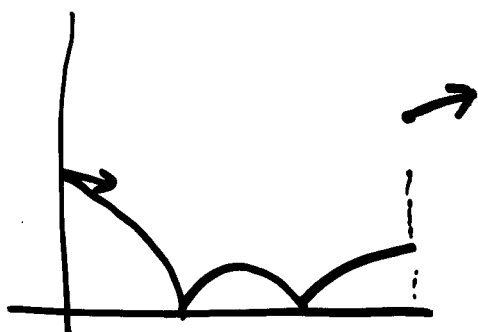
$$P(0) \in [1, +\infty) \times \mathbb{R}$$



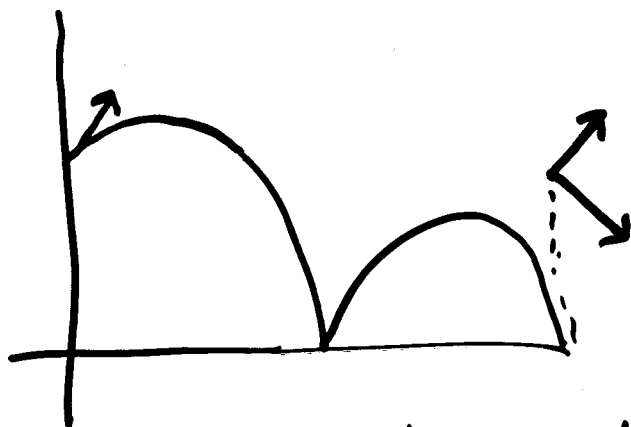
Discontinuidad del sistema I.I.

Proposición P es continua en todo punto $D \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}$ tal que

$$P(D) \in (1, +\infty) \times \mathbb{R}.$$



Nota: Si $P(D) = (1, v_0)$ entonces $v_0 \geq 0$
 y además para cualquier $D_n \rightarrow D$, la
 sucesión $P(D_n)$ tiene a lo menos dos valores
 adherentes $(1, v_0), (1, -\frac{v_0}{c})$



"no hay discontinuidad en desfasantes"

Sistemas disipativos

Sea K un convexo cerrado de $\mathbb{R}^N$, y

$F: K \rightarrow K$ una función.

Definición Se dice que el sistema

$$x_{k+1} = F(x_k)$$

es disipativo si existe R tal que

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} |x_k| \leq R$$

para cualquier solución.

Teorema Si F es continua entonces F tiene un punto fijo ($x = F(x)$)

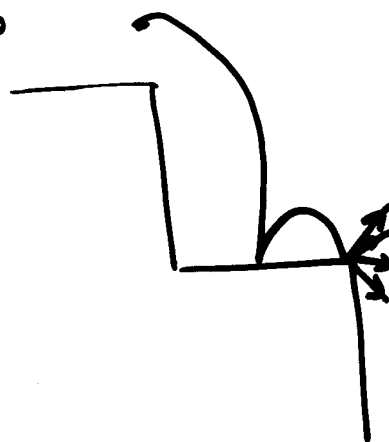
Teorema Sea F multivaluada y semicontinua superior, tal que para todo x , $F(x)$ es un convexo cerrado, entonces: si el sistema es disipativo, tiene un punto fijo $x \in F(x)$

Extensión del Problema

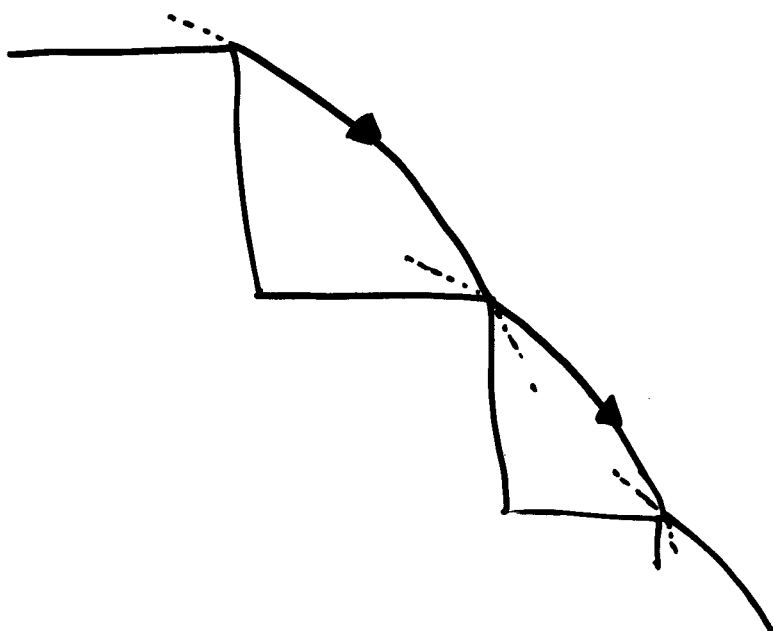
2

$$\tilde{P}(D) = \begin{cases} P(D) & \text{si } P(D) \in (1, +\infty) \times \mathbb{R} \\ \{1\} \times [-\frac{v_0}{\varepsilon}, v_0] & \text{si } P(D) = (1, v_0) \end{cases}$$

Sistema I.I. Extendido



Teorema El sistema extendido tiene siempre una solución periódica a 1 escalon.



Modelos con componente horizontal

(9)

$$\left. \begin{array}{l} x'' = 0 \\ y'' = -g \end{array} \right\} y(t) > E\left(\frac{x(t)}{a}\right)$$

$$y'(t^+) = -e y'(t^-) \quad y(t) = E\left(\frac{x(t)}{a}\right)$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 + v_x t$$

obtenemos un modelo equivalente donde

$$u = \frac{v_x}{a} \text{ (velocidad medida en escalones)}$$

•) No es disipativo

•) Infinidad de soluciones periódicas

•) Las soluciones periódicas no son estables

Modelos con componente horizontal

(10)

$$\left. \begin{array}{l} x'' = 0 \\ y'' = -g \end{array} \right\} y(t) > E\left(\frac{x(t)}{a}\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} y'(t^+) = -e_t y'(t^-) \\ x'(t^+) = e_n x'(t^-) \end{array} \right\} y(t) = E\left(\frac{x(t)}{a}\right)$$

En este caso $u = \frac{vx}{a}$ es variable y el sistema

$$u_{k+1} = e_n u_k$$

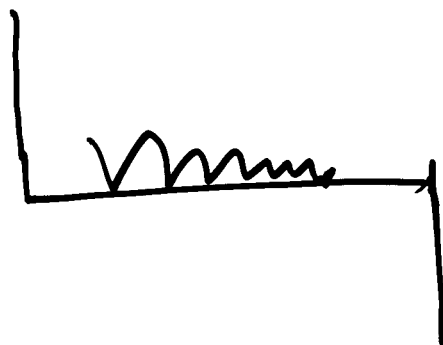
$$v_{k+1} = e_t \sqrt{v_k^2 + n}$$

$$z_{k+1} = z_k + n - 2u_k(v_k + \sqrt{v_k^2 + n})$$

"Pareda en un escalón"

Lema Supongamos $z_0 \geq \frac{4u_0 v_0}{1 - e_t e_n}$

entonces la partícula pasa en dicho escalón



Corolario. Toda solución para en algún escalon.

Dem De forma similar v_k este acotado
 $u_k \rightarrow 0$ luego si

$$z_k \leq \frac{4 u_k v_k}{1 - c_k c_N}$$

$$z_k \rightarrow 0 \quad \gamma$$

$$z_{k+1} = z_k + n_k - 4 u_k (v_k + \sqrt{v_k^2 + n_k})$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

luego $n_k \rightarrow 0$ es decir el número de salto es cero de un término en adelante