

SISTEMAS DINÁMICOS DE BAJA DIMENSIÓN

En la sesión dedicada a los Sistemas Dinámicos Discretos de baja dimensión se abordaron tres tipos de problemas que se corresponden con lo que conocemos hoy en día como Dinámica Combinatoria que en el primer problema se aplica a sistemas definidos intervalos compactos de la recta real y en otros espacios de dimensión uno, tales como árboles y grafos; Dinámica Caótica en intervalos compactos de la recta real o en espacios de dimensión superior (segundo problema) y Dinámica Topológica en el cuadrado unidad, en el espacio $\mathbb{R}^2$ o en otros espacios de dimensión dos tales como $\mathbb{T}^2$ o incluso $\mathbb{T}^n$ (tercer problema).

En Dinámica Combinatoria los problemas abordados se centran en la consideración de los conjuntos de períodos que poseen las funciones continuas y las implicación entre ellos, la noción de "pattern", las relaciones de "forcing" entre períodos y las consecuencias que se derivan de tales relaciones. La dinámica a estudiar es la que corresponde a conjuntos invariantes finitos. En un intervalo compacto de la recta real, se ejemplifica tal dinámica mediante la función "connect-the-dots" que permite dar una definición clara de "pattern" de "forcing" entre "patterns". Cuando se pasa a árboles y grafos la anterior función no tiene sentido y es necesario inventar otras definiciones. Las líneas futuras de investigación pasan por obtener definiciones más operativas que las actuales de "patterns" sobre grafos y también de obtener una teoría general de "forcing" sobre "pattern" en árboles y grafos. Una extensión de toda la teoría a conjuntos invariantes infinitos sería deseable.

En Dinámica Caótica se pasa revista a los Sistemas Dinámicos Caóticos en el sentido de Li-Yorke, a través de ideas del pasado, otras del presente y algunas para el futuro que conducen a plantear nuevos problemas y a considerar otros ya planteados desde hace tiempo.

Si un sistema dinámico discreto está definido por una función continua en el intervalo unidad y posee un punto periódico de período tres, entonces el sistema es caótico. En tal caso el sistema posee un conjunto *scrambled* no numerable formado por puntos para los que dos a dos sus órbitas se separan y se acercan suficientemente.

Para el análisis de este tipo de caos se pueden emplear técnicas de medida de los conjuntos *scrambled*, pero parece más acertado el enfoque del análisis en términos de Dinámica Topológica, es decir, usando herramientas de la topología tales como puntos *aproximadamente periódicos*, *asintóticamente periódicos*, conjuntos *minimales*, *omega-límite*, etc.

El número de puntos de los conjuntos *scrambled* resulta ser un problema relevante, ya que si un sistema tiene un par de puntos que verifican las propiedades de Li-Yorke entonces tiene un conjunto no numerable de dichos pares. Si

nos ubicamos en sistemas cuyo espacio de fases sea un espacio métrico compacto, entonces este resultado ya no es cierto y hace aparecer un buen número de problemas nuevos.

Por otra parte al relacionar las distintas nociones de caos con el caos Li-Yorke otros problemas aparecen. En particular con el caos en sentido Devaney (el sistema es transitivo y con un conjunto denso de puntos periódicos) y la entropía topológica.

Sin embargo y volviendo a los sistemas en el intervalo unidad, aún subsisten muchas cuestiones de tipo medida, estructura de conjuntos *scrambled*, dinámica de funciones suaves e incluso analíticas real sin resolver y que concitan nuestra atención.

Los sistemas dinámicos discretos de dimensión dos de la forma $(\mathbb{X}, F)$ donde $\mathbb{X} = \mathbb{R}^2$ o $K \subset \mathbb{R}^2$ con K compacto y $F \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, han merecido durante mucho tiempo la atención de los investigadores debido a sus interesantes aplicaciones: transformaciones de Poincaré asociadas a sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales, ecuaciones en diferencias no lineales con dos retardos y una variable ($x_{n+2} = f(x_n, x_{n+1})$), sistemas de ecuaciones en diferencias con dos variables (modelos de la Economía, Física, Dinámica de Poblaciones, Electrónica, etc) dados por

- $x_{n+1} = F(x_n, y_n)$
- $y_{n+1} = G(x_n, y_n)$

En las aplicaciones K suele ser un continuo o simplemente I^2 y la función que define el sistema es de la forma $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ donde las funciones f y g son continuas en su dominio de definición.

La investigación efectuada hasta el momento en el ámbito general de las funciones continuas, se ha centrado en la consideración de dos tipos de sistemas de la forma:

- $F(x, y) = (f(x), g(x, y))$
- $F(x, y) = (g(y), f(x))$

que se denominan respectivamente *sistemas triangulares* y *sistemas permutados o anti-triangulares*. En ambos casos se han obtenido numerosos resultados de Dinámica Combinatoria y de Dinámica Topológica. Cuando en estos mismos sistemas se usan funciones "suaves", hasta el momento, los resultados obtenidos son escasos.

Existen muchos modelos y ejemplos que no se ajustan a las formas triangular ni permutada. Consideramos interesante estudiar sistemas sin esas estructuras,

pero donde $f(x, y)$ y $g(x, y)$ sean polinomios en las variables x e y . Como este sería un problema muy difícil de resolver, nos restringimos a la siguiente situación

$$F(x, y) = (p_1(x, y), p_2(x, y))$$

donde $p_i = a_i x^2 + b_i xy + c_i y^2 + d_i x + e_i y + m_i$ para $i = 1, 2$ son polinomios cuadráticos.

Las transformaciones de Hénon

1. $F(x, y) = (1 - ax^2 + by, x)$
2. $F(x, y) = (y, (x + ay^2 - 1)/b)$

o las transformaciones logísticas bidimensionales

1. $F(x, y) = (y, ay(1 - x))$
2. $F(x, y) = (y, ay - bxy)$

son ejemplos bien conocidos de esta situación.

Una nueva clase de transformaciones del mismo tipo que proponemos estudiar, las que denominamos *transformaciones del tipo de Lotka-Volterra*, son aquellas de tipo cuadrático de la forma

$$F(x, y) = (x(a_1 - b_1 x - c_1 y), y(a_2 - b_2 x - c_2 y))$$

donde todos los parámetros que intervienen son positivos o cero. Estas transformaciones son un análogo de los sistemas de ecuaciones diferenciales del mismo tipo. Ejemplos de estas transformaciones se pueden encontrar en modelos depredador-presa de la Dinámica de Poblaciones e igualmente en circuitos electrónicos.