

Problemas en Sistemas Dinámicos Bidimensionales

Francisco Balibrea

Departamento de Matemáticas
Universidad de Murcia

La Manga, Murcia; Septiembre de 2004

introducción

Los sistemas dinámicos discretos de dimensión dos de la forma $(\mathbb{X}, F)$ donde $\mathbb{X} = \mathbb{R}^2$ o $K \subset \mathbb{R}^2$ con K compacto y $F \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, han merecido durante mucho tiempo la atención de los investigadores debido a sus interesantes aplicaciones: transformaciones de Poincaré asociadas a sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales, ecuaciones en diferencias no lineales con dos retardos y una variable

$$x_{n+2} = f(x_n, x_{n+1})$$

introducción

sistemas de ecuaciones en diferencias con dos variables (modelos de la Economía, Física, Dinámica de Poblaciones, Electrónica, etc) dados por

$$\textcircled{1} \quad x_{n+1} = F(x_n, y_n)$$

$$\textcircled{2} \quad y_{n+1} = G(x_n, y_n)$$

sistemas triangulares y permutados

En las aplicaciones K suele ser un continuo o simplemente I^2 y la función que define el sistema es de la forma

$F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ donde las funciones f y g son continuas en sus dominios de definición.

La investigación efectuada hasta el momento en el ámbito general de las *funciones continuas* se ha centrado en la consideración de dos tipos de sistemas cuyas estructuras son:

- 1 $F(x, y) = (f(x), g(x, y))$
- 2 $F(x, y) = (g(y), f(x))$

que se denominan respectivamente *sistemas triangulares* y *sistemas permutados o antitriangulares*

sistemas triangulares y permutados

En ambos casos se han obtenido numerosos resultados de Dinámica Combinatoria y de Dinámica Topológica.

En el caso triangular se verifica el *teorema de Sharkovskii* como en dimensión uno y que puede extenderse a la estructura triangular en dimensión n . Este resultado ha hecho que se estudie este caso siguiendo la filosofía de observar las analogías y las diferencias con el caso unidimensional.

sistemas triangulares y permutados

En el caso de un sistema permutado también existe una estructura periódica que viene dada por unos cuadros de forzamientos de períodos análogos en cierto sentido a los proporcionados por el teorema de Sharkovskii. En este caso, los resultados sobre estructura periódica pueden ser extendidos a funciones de n variables que posean estructura permutada. Como resultado de esta extensión, se ha podido explicar la estructura periódica que poseen las *ecuaciones en diferencias* del tipo $x_{n+k} = f(x_n)$ para $k \geq 2$

sistemas triangulares y permutados

Cuando las funciones que intervienen en los sistemas triangulares o los permutados son "suaves", existen realmente muy pocos resultados.

sistemas generales polinomiales

Existen muchos modelos y ejemplos que no se ajustan a las formas triangular ni permutada. Consideramos interesante estudiar sistemas sin esas estructuras, pero donde $f(x, y)$ y $g(x, y)$ sean polinomios en las variables x e y . Como este sería un problema muy difícil de resolver, nos restringimos a la siguiente situación

$$F(x, y) = (p_1(x, y), p_2(x, y))$$

donde $p_i = a_i x^2 + b_i xy + c_i y^2 + d_i x + e_i y + m_i$ para $i = 1, 2$ son polinomios cuadráticos.

sistemas de Hénon y logísticos

Las transformaciones de Hénon

- ① $F(x, y) = (1 - ax^2 + by, x)$
- ② $F(x, y) = (y, (x + ay^2 - 1)/b)$

o las transformaciones logísticas bidimensionales

- ① $F(x, y) = (y, ay(1 - x))$
- ② $F(x, y) = (y, ay - bxy)$

son ejemplos bien conocidos de esta situación.

sistemas de Lotka-Volterra

Una nueva clase de transformaciones del mismo tipo que proponemos estudiar, las que denominamos *transformaciones del tipo de Lotka-Volterra*, son aquellas de tipo cuadrático de la forma

$$F(x, y) = (x(a_1 + b_1x + c_1y), y(a_2 + b_2x + c_2y))$$

donde todos los parámetros que intervienen son reales. Estas transformaciones son un análogo de los sistemas de ecuaciones diferenciales del mismo tipo. Ejemplos de estas transformaciones se pueden encontrar en modelos depredador-presa de la Dinámica de Poblaciones e igualmente en circuitos electrónicos.

sistemas de Lotka-Volterra

Proponemos responder a una serie de preguntas sobre estas transformaciones de Lotka-Volterra, unas de tipo combinatorio y otras de tipo topológico, tales como:

- 1 ¿Existe estructura periódica?, ¿Se pueden calcular los puntos periódicos? ¿Y los finalmente periódicos?
- 2 ¿Existen curvas invariantes?. Estructura de los conjuntos minimales. ¿Existen otros conjuntos fuertemente invariantes?
- 3 Estructura topológica de los conjuntos omega-límite
- 4 Detección y existencia de atractores extraños si los hay
- 5 ¿Existen puntos cuya órbita sea densa?
- 6 Construcción de medidas invariantes
- 7 Bifurcaciones que se presentan en función de los parámetros del modelo.

ejemplos 1 y 2

La transformación

$$F(x, y) = ((1 + a - bx - cy)x, dxy)$$

con a, b, c y d parámetros reales, fue introducida en 1968 por Maynard Smith en el ámbito de la Dinámica de Poblaciones. En el mismo ámbito, Scudo y Levine en 1973 propusieron estudiar la transformación

$$F(x, y) = ((5 - 1.9x - 10y)x, xy)$$

ejemplo 3

En 1996, Sharkovskii propone estudiar la transformación

$$F(x, y) = ((4 - x - y)x, xy)$$

que modela el comportamiento de un circuito electrónico intentando probar la existencia de atractores extraños.

ejemplo 3

En 1998, Swirszcz da algunos resultados parciales al problema anterior.

ejemplo 3

El espacio de fases podemos suponer que es el triángulo Δ , donde

$$\Delta = \{(x, y) : x, y \geq 0; x + y \leq 4\}$$

es un conjunto fuertemente invariante de F .

Existen dos subconjuntos $\Omega, \Lambda \subset \Delta$ con las siguientes propiedades:

- Ω y Λ son disjuntos
- Ω and Λ son densos en Δ
- Ω es la unión de todas las preimágenes del punto $(0, 0)$
- Los conjuntos ω -límite de las trayectorias de los puntos de Λ se intersecan con $I = \{(x, y) : y = 0\}$ pero no coinciden con él.

ejemplo 3

Como consecuencia de lo anterior, no existen atractores extraños en este modelo.

ejemplo 3

Una línea de trabajo a considerar a partir del modelo 3 sería considerar

$$F(x, y) = (f(x) - xy, xy)$$

donde f sea una función polinómica real de variable real. Tales transformaciones pueden obtenerse como modelos en Dinámica de Poblaciones o en circuitos electrónicos.