



1/22

Segunda reunión de la Red Temática DANCE,
La Manga del Mar Menor (Murcia),
29 de Septiembre al 2 de Octubre de 2004

Caos en el sentido de Li-Yorke: pasado, presente y futuro

V. Jiménez López

Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia
e-mail: vjimenez@um.es



Back

Close

El objetivo de esta charla es ilustrar como ha evolucionado en la literatura una de los más felices hallazgos de la teoría de sistemas dinámicos, la noción de caos introducida por Li y Yorke en su célebre artículo en *Amer. Math. Monthly* de 1975. Explicaremos los resultados más relevantes de que se dispone hasta el momento en este contexto y propondremos posibles líneas de trabajo para el futuro, una de cuales puede ser, en nuestra opinión, de interés en el ámbito de las Ciencias Aplicadas (particularmente en Economía).



Back

Close

1. Un pasado legendario
2. Un presente dinámico
3. ¿Un futuro esperanzador?



Back

Close

1. Un pasado legendario

OLIMPIADAS DE LOS SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS:

Bronce: R. M. May, *Simple mathematical models with very complicated dynamics*, Nature **261** (1976), 459–467;

Plata: A. N. Sharkovsky, *Coexistencia de periodos en una aplicación continua de la recta en sí misma* (en ruso), Ukrain. Mat. Ž. **16** (1964), 61–71;

Oro: T.-Y. Li y J. A. Yorke, *Period three implies chaos*, Amer. Math. Monthly **82** (1975), 985–992.



Back

Close

Definición 1. Sea (X, d) un espacio métrico compacto y sea $f : X \rightarrow X$ continua. Sean $x, y \in X$. Diremos que (x, y) es un *par de Li-Yorke (para f)* si se cumple:

$$(\text{LY1}) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) > 0;$$

$$(\text{LY2}) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0.$$

Sea $S \subset X$. Diremos que S es un conjunto *scrambled* si (x, y) es un par de Li-Yorke para cada $x, y \in S$, $x \neq y$.

Se dice que f es *caótica (en el sentido de Li-Yorke)* si tiene un conjunto *scrambled* no numerable.

EL RESULTADO DE LI Y YORKE: Si $X = I = [0, 1]$ y f tiene un punto periódico de periodo 3 entonces f es caótica.



Back

Close

P. Collet y J.-P. Eckmann, *Iterated maps on the interval as dynamical systems*, Birkhäuser, Boston (1980), pp. 21–22 (a partir de Guckenheimer, *Comm. Math. Phys*, 1979):

IMPORTANT REMARK: When we have discussed above the “typical” behavior of a map, we have always insisted on analyzing what happen to *most* initial points. This is motivated by the fact that we want to make general statements about the behavior of dynamical systems. It happens very often that while *most* of the initial orbits show a very *regular* behavior (i.e., they approach a stable periodic orbit), some other initial points —very *few* in the sense of Lebesgue measure— behave rather in the ergodic way described above. Such a situation has been described in the paper by Li and Yorke “Period three implies chaos”. They show, among other things, that if a map has a (stable or unstable) orbit of period three, then the map in question shows sensitive dependence to initial conditions for an uncountable set of pairs of initial points. But —and maybe the paper did not make this sufficiently clear— for *most* other points this need not be the case, and hence from a physical point of view the chaotic behavior may be essentially unobservable.



Back

Close

Ejemplo paradigmático: $f_\alpha(x) = \alpha x(1 - x)$, $0 \leq \alpha \leq 4$; en los casos siguientes f_α es caótica pero **no** tiene conjuntos *scrambled* medibles de medida positiva:

- $\alpha = 3,83187\dots$; ¡**NATURAL!**: casi todo punto es atraído por una órbita periódica de periodo 3 (Guckenheimer, *Comm. Math. Phys.*, 1979);
- $\alpha = 4$; ¡**PERO ESTO NO DEBERÍA OCURRIR!**: la dinámica de f_4 es muy complicada en casi todo punto (Smítal, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1983).



Back

Close

Algunos resultados al respecto en I :

- los conjuntos *scrambled* no pueden ser residuales en ningún subintervalo de I (Gedeon, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 1987);
- existen funciones de clase C^∞ con conjuntos *scrambled* de medida positiva (J. L., *Bull. Austral. Math. Soc.*, 1992);
- las funciones de clase C^1 no pueden tener conjuntos *scrambled* de medida 1 (Balibrea y J. L., *Acta Univ. M. Belii*, 1999);
- toda función transitiva es topológicamente conjugada a una función con un conjunto *scrambled* de medida 1 (Babilonová, *Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.)*, 2000);
- no se conocen ejemplos de funciones analíticas con conjuntos *scrambled* de medida positiva: ¡CALLEJÓN SIN SALIDA!



Back

Close

Así pues, olvidémonos de la teoría de la medida (¡por el momento!) y concentrémonos en el aspecto topológico:

Definición 2. Sea $f : X \rightarrow X$ continua y sea $x \in X$. Diremos que x es *aproximadamente periódico* si para cada $\epsilon > 0$ existe un punto periódico p tal que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(p)) < \epsilon.$$

Diremos que x es *asintóticamente periódico* si existe un punto periódico p tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(p)) = 0.$$



Teorema 3 (Smítal, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1986, y Janková y Smítal, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 1986). Sea $f : I \rightarrow I$ continua. Entonces debe darse una de las siguientes alternativas:

- (i) todos los puntos de I son aproximadamente periódicos;
- (ii) existe un conjunto scrambled de tipo Cantor.

UN DETALLE: Si x, y son aproximadamente periódicos en X entonces (x, y) no puede ser un par de Li-Yorke (J. L., *Tesina de Licenciatura*, 1989). Por tanto, en el teorema anterior las posibilidades (i) y (ii) son incompatibles. Además se obtiene el siguiente

Corolario 4. Sea $f : I \rightarrow I$ continua. Si f tiene un conjunto scrambled de al menos dos elementos entonces es caótica en el sentido de Li-Yorke.



Back

Close

2. Un presente dinámico

Teorema 5 (Huang y Ye, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 2001). *Existen homeomorfismos en el conjunto de Cantor que tienen como conjunto scrambled todo el conjunto de Cantor.*

Teorema 6 (Blanchard, Glasner, Kolyada y Maass, *J. Reine Angew. Math.*, 2002). *Si $f : X \rightarrow X$ tiene entropía topológica positiva entonces es caótica en el sentido de Li-Yorke.*

Teorema 7 (Huang y Ye, *Topology Appl.*, 2002). *Si X es infinito y $f : X \rightarrow X$ es caótica en el sentido de Devaney (transitiva y el conjunto de puntos periódicos es denso) entonces es caótica en el sentido de Li-Yorke.*



Back

Close

3. ¿Un futuro esperanzador?

POSIBLES RUTAS A SEGUIR:

- Estudiar si se cumple que conjunto *scrambled* de dos elementos implica caos en el sentido de Li-Yorke en grafos (es cierto en el intervalo y en el círculo (Kuchta, *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 1990) y falso en el cuadrado (Forti, Paganoni y Smítal, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 1995).
- Investigar si se verifica el Teorema 3 para funciones triangulares *analíticas* en el cuadrado.
- Bajo adecuadas condiciones para X , $f : X \rightarrow X$ y una medida invariante μ , investigar si $h_\mu(f) > 0$ implica que la medida μ de todos los conjuntos scrambled es cero (un antecedente es Baba, Kubo y Takahashi, *Nonlinear Anal.*, 1996).



Back

Close

¡RECOMENDACIÓN DEL CHEF!

Primer ejemplo: K. Matsuyama (*Econometrica*, 1999)

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^{1-1/\sigma} & x \leq 1, \\ \alpha x / (1 + \theta(x - 1)) & x \geq 1, \end{cases}$$

$$\theta = (1 - 1/\sigma)^{1-\sigma}.$$



Back

Close



Figura 1: Gráfica de la función f en el intervalo $[f(\alpha), \alpha]$ para $\alpha = 1,01$, $\sigma = 50$ y $\theta = 2,6910532$.



Back

Close

Segundo ejemplo: T. Mitra (*J. Econom. Theory*, 2001)

$$g(x) = \alpha x(\theta - x)^\beta;$$

aquí el máximo se alcanza en $c = \theta/(1 + \beta)$.



Back

Close

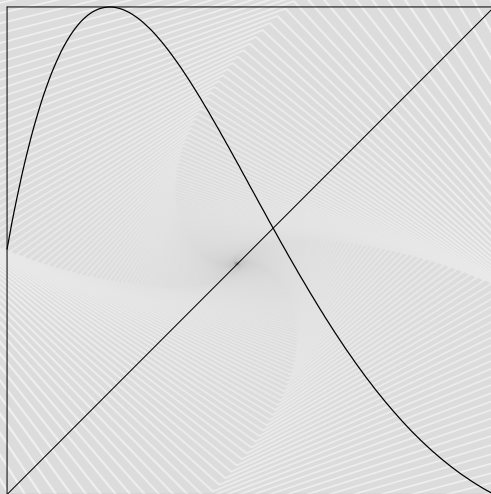


Figura 2: Gráfica de la función g en el intervalo $[g^2(c), g(c)]$ para $\alpha = 0,910116$, $\theta = 1,59$, $\beta = 5$.



Back

Close

Tercer ejemplo: J. Caballé, X. Jarque y E. Michetti (*preprint*)

$$h(x) = \begin{cases} (1 - \alpha)(e + x^\sigma(\xi - r\mu x^{1-\sigma})) & x \leq c, \\ (1 - \alpha)(e + rx) & x \geq c; \end{cases}$$

aquí el mínimo se alcanza en

$$c = \left(\frac{A}{r}\right)^{1/(1-\sigma)} \left(\frac{Z}{1+\mu}\right) \sigma^{\sigma/(1-\sigma)},$$

con

$$\xi = A\sigma^\sigma(1+\mu)^\sigma Z^{1-\sigma}.$$



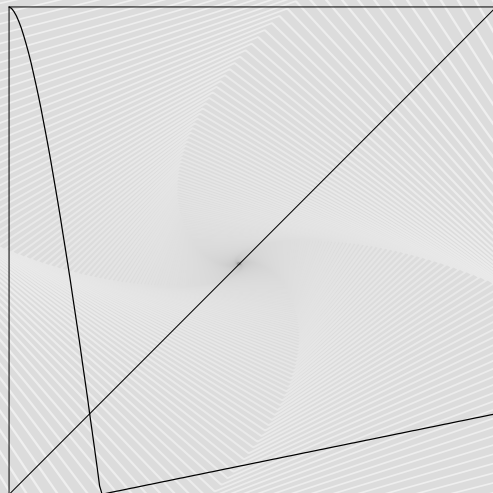


Figura 3: Gráfica de la función h en el intervalo $[h(c), h^2(c)]$ para $\sigma = 1/3$, $\alpha = 0,8$, $r = 1,02$, $A = 3/2$, $Z = 100$, $e = 0$, $\mu = 54,925$.



Back

Close

Denotemos por $\mathcal{S}$ a la familia de funciones analíticas unimodales $f : I \rightarrow I$ con $Sf = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2 < 0$ en $I \setminus \{c\}$ y tales que $f(0) = f(1) = 0$, $f''(c) < 0$ (siendo c el máximo de f).

Llamaremos *familia (k -paramétrica) analítica de funciones* en $\mathcal{S}$ a una función analítica $F : \text{Cl } \Lambda \times I \rightarrow I$ tal que $f_\lambda \in \mathcal{S}$, con $f_\lambda(x) = F(\lambda, x)$, siendo $\Lambda \subset \mathbb{R}^k$ un dominio acotado con frontera de clase C^∞ .

Diremos que una familia analítica de funciones en $\mathcal{S}$, $\{f_\lambda\}_\lambda$, es *no trivial* si existe λ_0 tal que el punto crítico de f_{λ_0} es atraído por una órbita hiperbólica pero ninguno de sus iterados pertenece a dicha órbita.



Back

Close

Teorema 8 (Avila, Lyubich y de Melo, *Invent. Math.*, 2003, y Avila y Moreira, *en preparación*). Sea $\{f_\lambda\}_\lambda$ una familia analítica de funciones en $\mathcal{S}$ no trivial. Entonces para casi todo λ la función f_λ es regular (casi todo punto de I es asintóticamente periódico) o estocástica (f_λ tiene una medida invariante absolutamente continua).



Back

Close

Sea $f : I \rightarrow I$. Diremos que un conjunto de Cantor K es un *atractor extraño caótico* de f si existe un conjunto de puntos de medida positiva que lo tienen como ω -límite y la dinámica de f restringida a K no es “solenoidal”.

Si $f \in \mathcal{S}$ entonces no tiene atractores extraños caóticos (Lyubich, Ann. of Math., 1994)

El siguiente resultado usa fuertemente herramientas desarrolladas por Blokh y Misiurewicz (*Comm. Math. Phys*, 1998) y van Strien y Vargas (aparecerá en *J. Amer. Math. Soc.*) y está inspirado por Piórek (*Univ. Iagel. Acta Math.*, 1985).



Back

Close

Teorema 9 (Barrio Blaya y J. L., *en preparación*). Supongamos que $f : I \rightarrow I$ tiene un número finito de puntos críticos, todos no degenerados, y que tiene derivada Schwarziana negativa. Supongamos además que f no tiene atractores extraños caóticos. Entonces o bien casi todo punto de f es aproximadamente periódico o bien el conjunto de los pares de Li-Yorke de f tiene medida (en I^2) positiva.

Por otro lado, f no tiene conjuntos scrambled medibles de medida positiva.

CONJETURA: El anterior teorema se satisface sin la restricción sobre atractores extraños y para una familia muy amplia de funciones “razonables”, en particular las analíticas y las analíticas a trozos.

PROPUESTA: ¡Hay que “vender” este paradigma a los economistas!



Back

Close