

22, 23 y 24 de Octubre de 2008. El Escorial (Madrid)

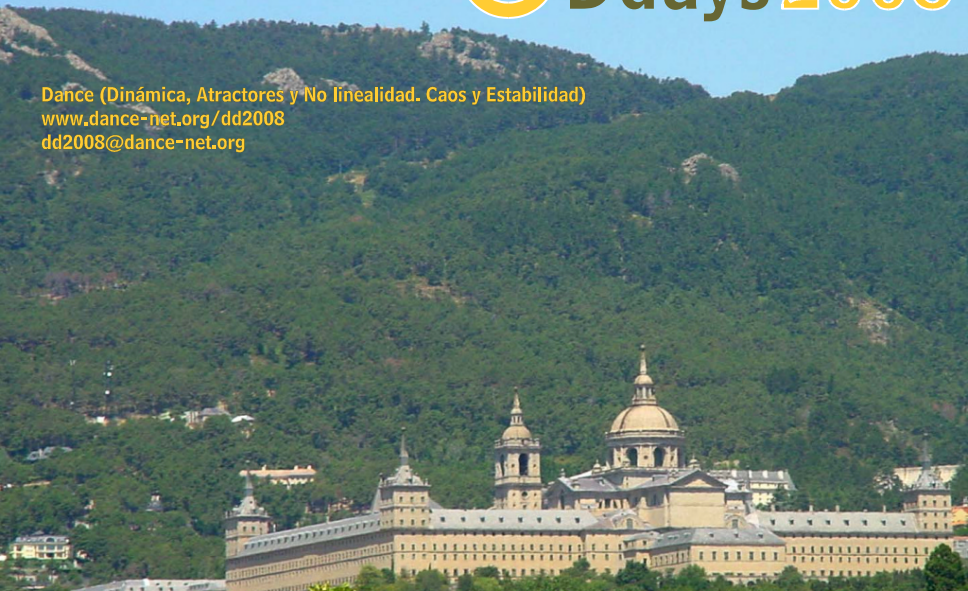
Cuarta reunión de la red temática Dance

# Ddays 2008

Dance (Dinámica, Atractores y No linealidad. Caos y Estabilidad)

[www.dance-net.org/dd2008](http://www.dance-net.org/dd2008)

[dd2008@dance-net.org](mailto:dd2008@dance-net.org)



# Centros Organizadores Locales de Dinámica Caótica en Sistemas Acoplados

**Ddays 2008 - Sesión 1: *Las fronteras del caos.  
Breakdown de toros invariantes.  
Frontera de la reducibilidad.***

**F. Drubi, S. Ibáñez, J. A. Rodríguez**

Dpto. de Matemáticas - Universidad de Oviedo



El Escorial (Madrid), a 22 de octubre de 2008

- Parte I: Sistemas Acoplados
- Parte II: Centros Organizadores Locales  
de Dinámica Caótica
- Parte III: Acoplamiento de Dos Brusselators

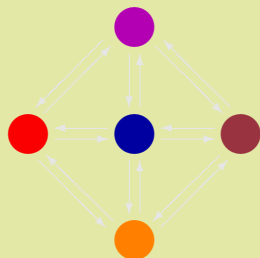


## Parte I

# Sistemas Acoplados



# Centros Organizadores Locales de Dinámica Caótica en Sistemas Acoplados



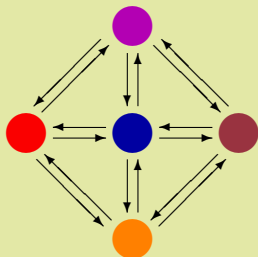
$$\vec{u}'_i = F_i(\vec{u}_i) + \overbrace{\sum_{j=1}^m H_{ij}(\vec{u}_i, \vec{u}_j)}^{\text{ACOPLAMIENTO}}$$

con  $i = 1, \dots, m$ ,

siendo  $\vec{u}_i \in \mathbb{R}^k$  para cada  $i = 1, \dots, m$ .



# Centros Organizadores Locales de Dinámica Caótica en Sistemas Acoplados



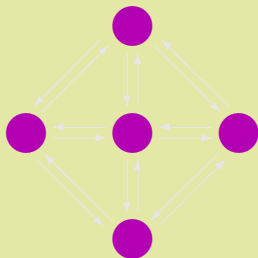
$$\vec{u}'_i = F_i(\vec{u}_i) + \overbrace{\sum_{j=1}^m H_{ij}(\vec{u}_i, \vec{u}_j)}^{\text{ACOPLAMIENTO}}$$

con  $i = 1, \dots, m$ ,

siendo  $\vec{u}_i \in \mathbb{R}^k$  para cada  $i = 1, \dots, m$ .



# Centros Organizadores Locales de Dinámica Caótica en Sistemas Acoplados



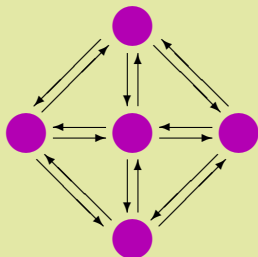
$$\vec{u}'_i = F(\vec{u}_i) + \overbrace{\sum_{j=1}^m H_{ij}(\vec{u}_i, \vec{u}_j)}^{\text{ACOPLAMIENTO}}$$

con  $i = 1, \dots, m$ ,

siendo  $\vec{u}_i \in \mathbb{R}^k$  para cada  $i = 1, \dots, m$ .



# Centros Organizadores Locales de Dinámica Caótica en Sistemas Acoplados



$$\vec{u}'_i = F(\vec{u}_i) + \overbrace{\sum_{j=1}^m H_{ij}(\vec{u}_i, \vec{u}_j)}^{\text{ACOPLAMIENTO}}$$

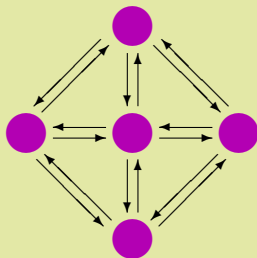
con  $i = 1, \dots, m$ ,

siendo  $\vec{u}_i \in \mathbb{R}^k$  para cada  $i = 1, \dots, m$ .





## Acoplamiento mediante difusión lineal



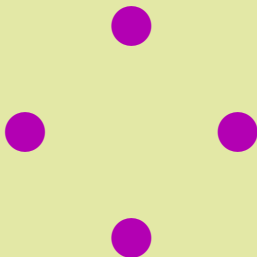
$$\vec{u}'_i = F(\vec{u}_i) + \overbrace{\sum_{j=1}^m a_{ij} D(\vec{u}_i, \vec{u}_j)}^{\text{Difusión}} \quad \text{con } i = 1, \dots, m,$$

siendo

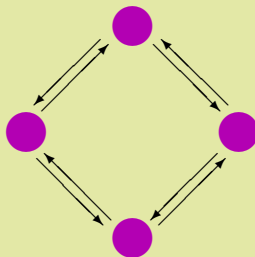
- $\vec{u}_i \in \mathbb{R}^k$  para cada  $i = 1, \dots, m$ ,
- $a_{ij} \in \{0, 1\}$  y  $a_{ij} = a_{ji}$  para todo  $i, j = 1, \dots, m$ .
- $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  con  $\lambda_l \geq 0$  para todo  $l = 1, \dots, k$ .



# Centros Organizadores Locales de Dinámica Caótica en Sistemas Acoplados



Equilibrio

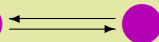


Oscilación

- [1] A. Turing, *Philos. Trans. Roy. Soc. B*, (1952).
- [2] S. Smale, *Lectures on Math. in the Life Sciences*, (1974). 4D
- [3] L.Ñ. Howard, *Lectures in Appl. Math.*, (1979). 3D
- [4] J. C. Alexander, *J. Math Biol.*, (1986). 2D



# Centros Organizadores Locales de Dinámica Caótica en Sistemas Acoplados



Equilibrio

Oscilación

- [1] A. Turing, *Philos. Trans. Roy. Soc. B*, (1952).
- [2] S. Smale, *Lectures on Math. in the Life Sciences*, (1974). 4D
- [3] L.Ñ. Howard, *Lectures in Appl. Math.*, (1979). 3D
- [4] J. C. Alexander, *J. Math Biol.*, (1986). 2D



- ¿Es posible generar dinámica caótica acoplando estructuras simples?
- ¿Es posible generar dinámica caótica acoplando **puntos de equilibrio globalmente asintóticamente estables**?
- ¿y acoplando **órbitas periódicas globalmente asintóticamente estables**?

[1] F. Drubi, S. Ibáñez, and J. A. Rodríguez *J. Differential Equations*, 239 (2007) p 371-385.



## Parte II

# Centros Organizadores Locales



## Órbitas homoclínicas de tipo Shil'nikov



## Atractores Extraños

- [1] L. Mora, and M. Viana, *Acta Math.*, 171 (1993).
- [2] A. Pumariño, and J. A. Rodríguez, *Lecture Note in Math* , 1658 Springer, Berlin (1997).
- [3] A. Pumariño, and J. A. Rodríguez, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, (2001).
- [4] A. J. Homburg, *Nonlinearity* 15 (2002).



## Singularidades



## Órbitas homoclínicas de tipo Shil'nikov

- [1] F. Dumortier, S. Ibáñez, and H. Kokubu, *Dynamical Systems* (2001).
- [2] F. Dumortier, S. Ibáñez, and H. Kokubu, *Nonlinearity* (2006).
- [3] S. Ibáñez, and J. A. Rodríguez, *J. Differential Equations* (2005).



↓

↓

- Las singularidades son los centros organizadores de dinámica caótica más fáciles de detectar en una familia.
- Algunos centros organizadores locales de dinámica caótica son: las singularidades **Hopf-zero**, las singularidades **Hopf-pitchfork** y la singularidad **nilpotente** de codimensión 3 en  $\mathbb{R}^3$





## Singularidades Hopf-pitchfork

$X_\mu$  familia 2-paramétrica de campos vectoriales en  $\mathbb{R}^3$

$$x' = X_\mu(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad \mu \in \mathbb{R}^2,$$

invariante por la simetría

$$(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow (x_1, x_2, -x_3)$$

tal que  $X_0(0) = 0$  y los autovalores de  $DX_0(0)$  son

$$\{0, -i\omega, +i\omega\} \quad \text{con } \omega > 0.$$



$$\begin{cases} \rho' &= \rho \left( \mu_1 + F(\rho^2, z^2, \mu_1, \mu_2) \right), \\ z' &= z \left( \mu_2 + G(\rho^2, z^2, \mu_1, \mu_2) \right), \\ \theta' &= \omega + \tilde{F}(\rho^2, z^2, \mu_1, \mu_2), \end{cases}$$

con  $F(0, 0, \mu_1, \mu_2) = \tilde{F}(0, 0, \mu_1, \mu_2) = G(0, 0, \mu_1, \mu_2) = 0$ .

Como  $\theta' > 0$  en un entorno del origen, podemos tomar  $\theta' = 1$  mediante un reescalado del tiempo. Esto permite reducir el estudio a una familia plana de campos vectoriales:

$$\begin{cases} \rho' &= \rho \left( \mu_1 + F(\rho^2, z^2, \mu_1, \mu_2) \right), \\ z' &= z \left( \mu_2 + G(\rho^2, z^2, \mu_1, \mu_2) \right). \end{cases}$$



$$\begin{cases} \rho' &= \rho \left( \mu_1 + F(\rho^2, z^2, \mu_1, \mu_2) \right), \\ z' &= z \left( \mu_2 + G(\rho^2, z^2, \mu_1, \mu_2) \right), \\ \theta' &= \omega + \tilde{F}(\rho^2, z^2, \mu_1, \mu_2), \end{cases}$$

con  $F(0, 0, \mu_1, \mu_2) = \tilde{F}(0, 0, \mu_1, \mu_2) = G(0, 0, \mu_1, \mu_2) = 0$ .

Como  $\theta' > 0$  en un entorno del origen, podemos tomar  $\theta' = 1$  mediante un reescalado del tiempo. Esto permite reducir el estudio a una familia plana de campos vectoriales:

$$\begin{cases} \rho' &= \rho \left( \mu_1 + F(\rho^2, z^2, \mu_1, \mu_2) \right), \\ z' &= z \left( \mu_2 + G(\rho^2, z^2, \mu_1, \mu_2) \right). \end{cases}$$



**Despliegues HP de codimensión 2:**

- [1] J. Guckenheimer, P. J. Holmes, *Applied Math. Sciences* 42 (1983).
- [2] Y. A. Kuznetsov, *Applied Math. Sciences* 112 (1995).

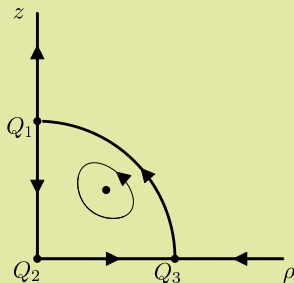
**Despliegues HP de codimensión 3:**

- [3] A. Algaba, E. Freire, E. Gamero, and A. J. Rodríguez-Luis *J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* 9 (1999).
- [4] A. Algaba, E. Freire, E. Gamero, and A. J. Rodríguez-Luis *Nonlinearity* 12 (1999).
- [5] A. Algaba, E. Freire, E. Gamero, and A. J. Rodríguez-Luis *Nonlinear Dynam.* 22 (2000).

**Despliegues HP de codimensión 4:**

- [6] A. Algaba, M. Marino, E. Freire, E. Gamero, and A. J. Rodríguez-Luis *J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* 10 (2000).





Rotura del ciclo heteroclínico

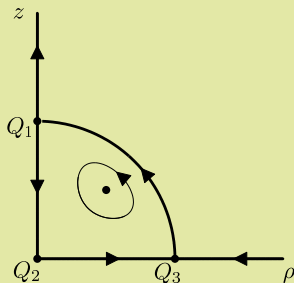
+

Condiciones de Shil'nikov

↓

Atractores Extraños





Rotura del ciclo heteroclínico

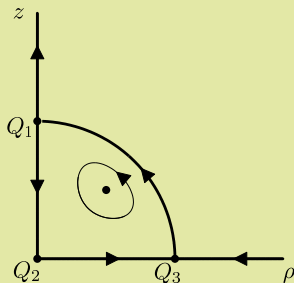
+

Condiciones de Shil'nikov

↓

Atractores Extraños





Rotura del ciclo heteroclínico

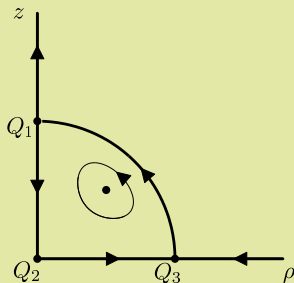
+

Condiciones de Shil'nikov



Atractores Extraños





Rotura del ciclo heteroclínico

+

Condiciones de Shil'nikov

$\Downarrow$

Atractores Extraños





## Singularidades nilpotentes de codimensión 3

$X_\mu$  familia 3-paramétrica de campos vectoriales en  $\mathbb{R}^3$

$$x' = X_\mu(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad \mu \in \mathbb{R}^3,$$

tal que  $X_0(0) = 0$  y la  $DX_0(0)$  es linealmente conjugada a la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



Forma normal de la singularidades nilpotentes  
3-dimensionales:

$$\begin{cases} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= x_3, \\ x_3' &= ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_1x_3 + dx_2^2 + O(3), \end{cases}$$

- Bajo la condición genérica  $a \neq 0$  que caracteriza las singularidades nilpotentes 3-dimensionales de codimensión 3, existe un único tipo topológico

[1] F. Dumortier, and S. Ibáñez, *J. Differential Equation* (1996).

[2] F. Dumortier, and S. Ibáñez, *Nonlinearity* (1998).



Despliegue genérico de la singularidad nilpotente  
3-dimensional de codimensión 3:

$$\begin{cases} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= x_3, \\ x_3' &= \mu_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 + x_1^2 + bx_1 x_2 + cx_1 x_3 + dx_2^2 + O(3). \end{cases}$$

### Teorema

*Cualquier despliegue genérico de la singularidad nilpotente 3-dimensional de codimensión 3 contiene atractores extraños.*

[1] S. Ibáñez, and J. A. Rodríguez, *J. Differential Equations* (2005).



**Lema**

*Cualquier despliegue genérico de una singularidad nilpotente  $n$ -dimensional de codimensión  $n$  se puede escribir como:*

$$\begin{cases} x'_k &= x_{k+1} \text{ para } k = 1, \dots, n-1 \\ x'_n &= \mu_1 + \sum_{j=2}^n \mu_j x_j + x_1^2 + h(\mu, x) \end{cases}$$

*siendo  $\mu_1, \dots, \mu_n$  y el coeficiente de  $x_1^2$  exactamente los coeficientes de un desarrollo con respecto a  $x$ . Además, la función  $h$  es una  $O(\|(\mu, x)\|^2)$  y una  $O(\|x_2, \dots, x_n\|)$ .*

[1] F. Drubi, S. Ibáñez, and J. A. Rodríguez, *J. Differential Equations* 239 (2007) p 371-385.



**Teorema**

*Cualquier singularidad nilpotente  $n$ -dimensional de codimensión  $n$  despliega genéricamente singularidades nilpotentes  $(n - 1)$ -dimensionales de codimensión  $n - 1$ .*

[1] F. Drubi, S. Ibáñez, and J. A. Rodríguez, *J. Differential Equations* 239 (2007) p 371-385.



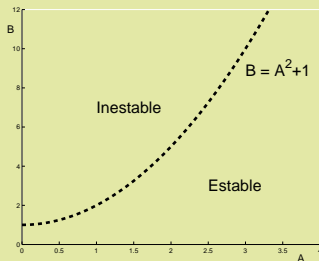
## Parte III

# Acoplamiento de Dos Brusselators



$$\begin{cases} \begin{cases} x_1' &= A - (B + 1)x_1 + x_1^2 y_1 + \lambda_1(x_2 - x_1) \\ y_1' &= Bx_1 - x_1^2 y_1 + \lambda_2(y_2 - y_1) \end{cases} \\ \begin{cases} x_2' &= A - (B + 1)x_2 + x_2^2 y_2 + \lambda_1(x_1 - x_2) \\ y_2' &= Bx_2 - x_2^2 y_2 + \lambda_2(y_1 - y_2) \end{cases} \end{cases}$$

Un único punto de equilibrio en  $(A, B/A)$



$$\left\{ \begin{array}{l} x_1' = A - (B + 1)x_1 + x_1^2 y_1 + \lambda_1(x_2 - x_1) \\ y_1' = Bx_1 - x_1^2 y_1 + \lambda_2(y_2 - y_1) \\ x_2' = A - (B + 1)x_2 + x_2^2 y_2 + \lambda_1(x_1 - x_2) \\ y_2' = Bx_2 - x_2^2 y_2 + \lambda_2(y_1 - y_2) \end{array} \right.$$

$$V = \{(A, B, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^4 : A > 0, B > 0, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0\}$$

Simetría:  $(x_1, y_1, x_2, y_2) \longrightarrow (x_2, y_2, x_1, y_1)$

Punto de equilibrio “**trivial**”:  $(A, B/A, A, B/A)$





$$\left\{ \begin{array}{l} x_1' = A - (B + 1)x_1 + x_1^2 y_1 + \lambda_1(x_2 - x_1) \\ y_1' = Bx_1 - x_1^2 y_1 + \lambda_2(y_2 - y_1) \\ x_2' = A - (B + 1)x_2 + x_2^2 y_2 + \lambda_1(x_1 - x_2) \\ y_2' = Bx_2 - x_2^2 y_2 + \lambda_2(y_1 - y_2) \end{array} \right.$$

$$V = \{(A, B, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^4 : A > 0, B > 0, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0\}$$

Simetría:  $(x_1, y_1, x_2, y_2) \longrightarrow (x_2, y_2, x_1, y_1)$

Punto de equilibrio “**trivial**”:  $(A, B/A, A, B/A)$



$$\left\{ \begin{array}{l} x_1' = A - (B + 1)x_1 + x_1^2 y_1 + \lambda_1(x_2 - x_1) \\ y_1' = Bx_1 - x_1^2 y_1 + \lambda_2(y_2 - y_1) \\ x_2' = A - (B + 1)x_2 + x_2^2 y_2 + \lambda_1(x_1 - x_2) \\ y_2' = Bx_2 - x_2^2 y_2 + \lambda_2(y_1 - y_2) \end{array} \right.$$

$$V = \{(A, B, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^4 : A > 0, B > 0, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0\}$$

Simetría:  $(x_1, y_1, x_2, y_2) \longrightarrow (x_2, y_2, x_1, y_1)$

Punto de equilibrio “trivial”:  $(A, B/A, A, B/A)$



$$\left\{ \begin{array}{l} x_1' = A - (B + 1)x_1 + x_1^2 y_1 + \lambda_1(x_2 - x_1) \\ y_1' = Bx_1 - x_1^2 y_1 + \lambda_2(y_2 - y_1) \\ x_2' = A - (B + 1)x_2 + x_2^2 y_2 + \lambda_1(x_1 - x_2) \\ y_2' = Bx_2 - x_2^2 y_2 + \lambda_2(y_1 - y_2) \end{array} \right.$$

$$V = \{(A, B, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^4 : A > 0, B > 0, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0\}$$

Simetría:  $(x_1, y_1, x_2, y_2) \longrightarrow (x_2, y_2, x_1, y_1)$

Punto de equilibrio “trivial”:  $(A, B/A, A, B/A)$



$$\begin{cases} x_1' &= A - (B + 1)x_1 + x_1^2 y_1 + \lambda_1(x_2 - x_1) \\ y_1' &= Bx_1 - x_1^2 y_1 + \lambda_2(y_2 - y_1) \\ x_2' &= A - (B + 1)x_2 + x_2^2 y_2 + \lambda_1(x_1 - x_2) \\ y_2' &= Bx_2 - x_2^2 y_2 + \lambda_2(y_1 - y_2) \end{cases}$$

$$V = \{(A, B, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^4 : A > 0, B > 0, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0\}$$

Simetría:  $(x_1, y_1, x_2, y_2) \longrightarrow (x_2, y_2, x_1, y_1)$

Punto de equilibrio “**trivial**”:  $(A, B/A, A, B/A)$



## Singularidades Hopf-pitchfork en el modelo

$$\text{HP} = \{(A, B, \lambda_1, \lambda_2) \in V : B = 1 + A^2, \lambda_2 \geq \frac{1}{2},$$

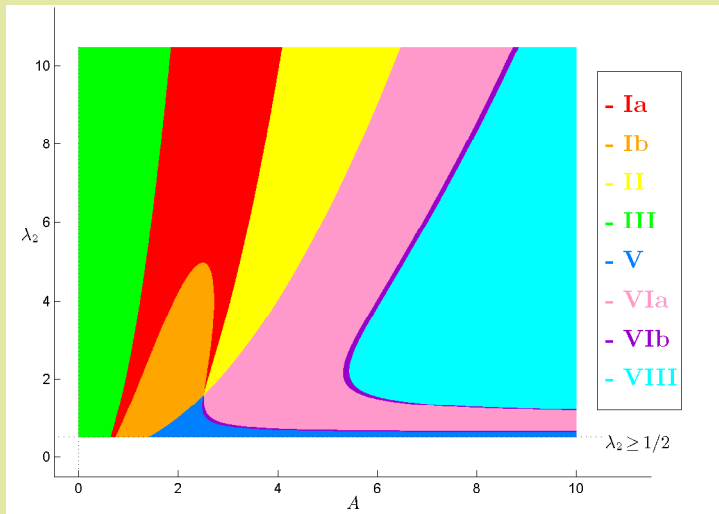
$$\lambda_1 = \frac{(-1 + 2\lambda_2)A^2}{2(A^2 + 2\lambda_2)} \}$$

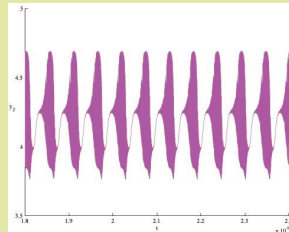
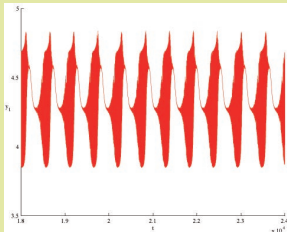
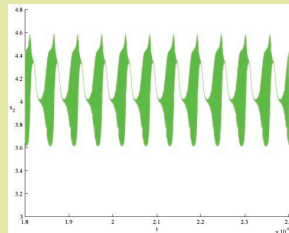
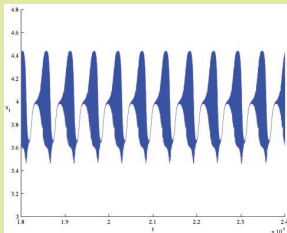
[1] F. Drubi, S. Ibáñez, and J. A. Rodríguez, *Hopf-pitchfork singularities in coupled systems*, (in progress).

[2] F. Drubi, S. Ibáñez, and J. A. Rodríguez, *Proceedings Equadiff 2007*.



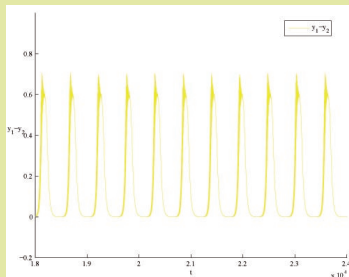
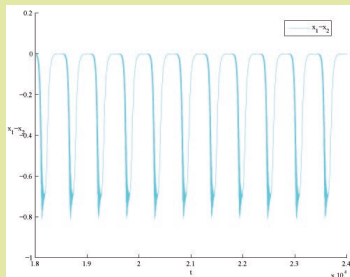
# Centros Organizadores Locales de Dinámica Caótica en Sistemas Acoplados





$$A = 4, B = 17,046795, \lambda_1 = 1,21, \lambda_2 = 2$$





$$A = 4, B = 17,046795, \lambda_1 = 1,21, \lambda_2 = 2$$





## Singularidades nilpotentes en el modelo: Caos

- Existe un punto en el espacio de parámetros  $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2)$  donde el sistema tiene una singularidad nilpotente 4-dimensional de codimension 4 que es genéricamente desplegada por la familia.
- Cualquier despliegue genérico de una singularidad nilpotente 4-dimensional de codimensión 4 contiene despliegues genéricos de singularidades nilpotentes 3-dimensionales de codimensión 3.

[1] F. Drubi, S. Ibáñez, and J. A. Rodríguez, *J. Differential Equations* 239 (2007) p 371-385.

[2] F. Drubi, S. Ibáñez, and J. A. Rodríguez, aparecerá en *Bulletin of the Belgian Mathematical Society* (2007).



**Teorema**

*Existe un punto  $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2)$  en el espacio de parámetros de la familia que se obtiene al acoplar dos Brusselators mediante difusión lineal,*

$$\begin{cases} x_1' = A - (B + 1)x_1 + x_1^2 y_1 + \lambda_1(x_2 - x_1) \\ y_1' = Bx_1 - x_1^2 y_1 + \lambda_2(y_2 - y_1) \\ x_2' = A - (B + 1)x_2 + x_2^2 y_2 + \lambda_1(x_1 - x_2) \\ y_2' = Bx_2 - x_2^2 y_2 + \lambda_2(y_1 - y_2), \end{cases}$$

*tal que arbitrariamente cerca existen valores  $(A, B, \lambda_1, \lambda_2)$  para los que dicho sistema exhibe atractores extraños.*



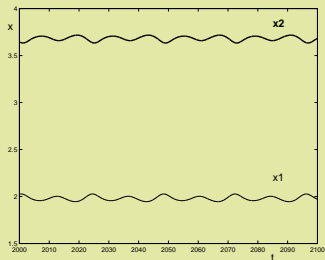
Exponentes de Lyapunov asociados a diferentes valores  
del parámetro  $B$  para  $\lambda_1 = 1.205$  fijado

	$B$	E. Lyapunov 1	E. Lyapunov 2	E. Lyapunov 3	E. Lyapunov 4
(a)	11.47520	0.000	-0.035	-0.571	-3.064
(b)	11.47540	0.000	-0.003	-0.605	-3.053
(c)	11.47560	0.000	-0.019	-0.597	-3.042
(d)	11.47570	0.000	-0.002	-0.616	-3.036
(e)	11.47580	0.031	0.000	-0.651	-3.031
(f)	11.47590	0.033	0.000	-0.665	-3.024
(g)	11.47610	0.053	0.000	-0.692	-3.012
(h)	11.47630	0.055	0.000	-0.676	-3.004
(i)	11.47650	0.066	0.000	-0.690	-2.993
(j)	11.47670	0.000	-0.004	-0.550	-2.993
(k)	11.47690	0.074	0.000	-0.642	-2.980
(l)	11.47700	0.000	-3.711	-20.31	-22.36

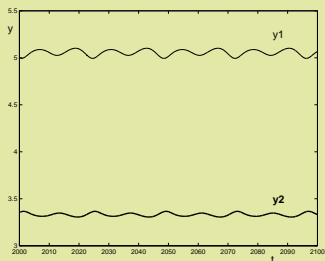
(0, -, -, -)

(+, 0, -, -)





(c)  $B = 11.47560$ ,  $\lambda_1 = 1.205$



Órbita Periódica

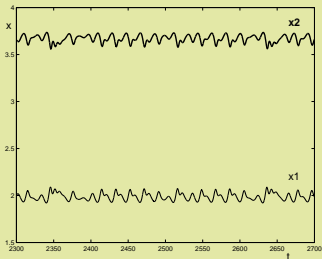


Caso (c): órbita periódica atractora con exponentes de Lyapunov  $(0.000, -0.019, -0.597, -3.042)$

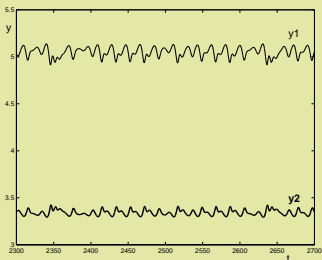


Variación con el tiempo de las variables  $x_1$ ,  $y_1$  (arriba) y de las variables  $x_2$ ,  $y_2$  (abajo)





$$(k) \ B = 11.47690, \ \lambda_1 = 1.205$$



Atractor Extraño

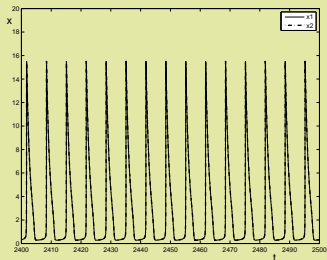


Caso (k): atractor extraño con exponentes de Lyapunov (0.074, 0.000,  $-0.642$ ,  $-2.980$ )

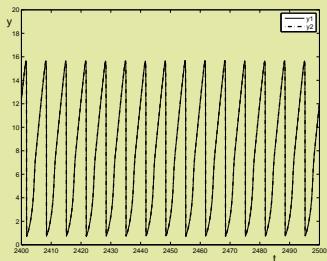


Variación con el tiempo de las variables  $x_1$ ,  $y_1$  (arriba) y de las variables  $x_2$ ,  $y_2$  (abajo)





$$(I) B = 11.47700, \lambda_1 = 1.205$$



Sincronización





Caso (I): órbita periódica atractora con exponentes de Lyapunov (0.000,  $-3.711$ ,  $-20.31$ ,  $-22.36$ )



Variación con el tiempo de las variables  $x_1$ ,  $y_1$  (arriba) y de las variables  $x_2$ ,  $y_2$  (abajo)



# Centros Organizadores Locales de Dinámica Caótica en Sistemas Acoplados

**Ddays 2008 - Sesión 1: *Las fronteras del caos.  
Breakdown de toros invariantes.  
Frontera de la reducibilidad.***

**F. Drubi, S. Ibáñez, J. A. Rodríguez**

Dpto. de Matemáticas - Universidad de Oviedo



El Escorial (Madrid), a 22 de octubre de 2008