Orbitas periódicas en la ecuación de Abel: El problema centro-foco.

FRANCESC MAÑOSAS

DDAYS, 2010

1.La ecuación de Abel

1.La ecuación de Abel

$$\dot{r} = A(\theta)r^3 + B(\theta)r^2, \tag{1}$$

donde $A(\theta)$ y $B(\theta)$ son funciones analíticas y periódicas de período 2π.

1.La ecuación de Abel

$$\dot{r} = A(\theta)r^3 + B(\theta)r^2, \tag{1}$$

donde $A(\theta)$ y $B(\theta)$ son funciones analíticas y periódicas de período 2π.

Observemos que $r = 0$ és una solución (2π-periódica) de la ecuación. El problema centro-foco es el de caracterizar en términos de los coeficientes $A(\theta)$ y $B(\theta)$ cuando la solución $r = 0$ forma parte de un continuo de órbitas 2π-periódicas.

1.La ecuación de Abel

$$\dot{r} = A(\theta)r^3 + B(\theta)r^2, \tag{1}$$

donde $A(\theta)$ y $B(\theta)$ son funciones analíticas y periódicas de período 2π.

Observemos que $r = 0$ és una solución (2π-periódica) de la ecuación. El problema centro-foco es el de caracterizar en términos de los coeficientes $A(\theta)$ y $B(\theta)$ cuando la solución $r = 0$ forma parte de un continuo de órbitas 2π-periódicas.

Si denotamos por $\varphi(\theta, \rho)$ la solución de la ecuación que verifica $\varphi(0, \rho) = \rho$, el problema centro-foco es el de determinar cuando la aplicación $h(\rho) = \varphi(2\pi, \rho) = Id$. Observad que la aplicación h está siempre definida en un entorno de 0.

1.La ecuación de Abel

Si expresamos $\varphi(\theta,\rho)$ en serie de potencias

$$\varphi(\theta,\rho)=\sum_{i\geq 1} a_i(\theta)\rho^i$$

la condición de centro es equivalente $a_1=1$ y $a_i(0)=a_i(2\pi)=0$ para todo $i>1$.

2.Motivación: Centros en el sistema lineal mas homogéneo

Consideremos la ecuación

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + P_n(x,y), \\ \dot{y} &= x + Q_n(x,y), \end{aligned} \tag{2}$$

donde $P_n(x,y)$ y $Q_n(x,y)$ son polinomios homogéneos de grado n. El problema de determinar condiciones necesarias y/o suficientes para que el sistema (2) tenga un centro en el origen es conocido como el "Problema centro-Foco" para sistemas del tipo lineal más homogéneo. Es bien conocido que la respuesta a este problema viene dado por un número finito (pero indeterminado) de condiciones algebraicas sobre los coeficientes de $P_n(x,y)$ y $Q_n(x,y)$. Para $n = 2, 3$ el problema està cerrado desde los años 50, y para $n > 3$ ni tan sólo se conoce el número de ecuaciones que determinan el problema. No obstante, hay numerosos resultados parciales obtenidos primordialmente por el grupo de investigadores de la Universitat de Lleida (Chavarriga, Giné, García, Grau) para $n = 4, 5, 6, 7$.

2.Motivación: Centros en el sistema lineal más homogéneo

En coordenadas polares (ρ, θ), el sistema (2) se escribe

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \rho^n f(\theta), \\ \dot{\theta} &= 1 + g(\theta)\rho^{n-1}, \end{aligned} \tag{3}$$

con

$$f(\theta) = \cos(\theta)\, P_n(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \sin(\theta)\, Q_n(r\cos(\theta), r\sin(\theta)),$$

y

$$g(\theta) = \cos(\theta)\, Q_n(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) - \sin(\theta)\, P_n(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

2.Motivación: Centros de los sistemas lineal mas homogéneo

Aplicando el cambio de variables introducido por Cherkas

$$r = \frac{\rho^{n-1}}{1 + g(\theta)\,\rho^{n-1}}$$

obtenemos la ecuación de Abel

$$\dot{r} = A(\theta)r^3 + B(\theta)r^2, \tag{4}$$

donde $\dot{r}$ indica la derivación respecto θ y

$$A(\theta) = -(n-1)f(\theta)g(\theta)\,,\; B(\theta) = g'(\theta) - (n-1)f(\theta).$$

Observemos que en este caso $A(\theta)$ y $B(\theta)$ son polinomios trigonométricos homogéneos de grado $2(n+1)$ y $n+1$ respectivamente.

3. El mecanismo de composición

3. El mecanismo de composición

En 1985 (Proc. Roy. Soc. Edinburgh) Lloyd y Alwash dan una condición suficiente de centro que llamaremos mecanismo de composición. Dada una función $F(\theta)$ denotamos por $\tilde{F}(\theta) = \int_0^\theta F(s)ds$.

3. El mecanismo de composición

En 1985 (Proc. Roy. Soc. Edinburgh) Lloyd y Alwash dan una condición suficiente de centro que llamaremos mecanismo de composición. Dada una función $F(\theta)$ denotamos por $\tilde{F}(\theta) = \int_0^\theta F(s)ds$.

Definición 1. Las funciones $A(\theta)$ y $B(\theta)$ satisfacen la *Condición de composición* (CC) si existe una función derivable 2π-periódica $u(\theta)$ tal que

$$\tilde{A}(\theta) = A_1(u(\theta)) \ y \ \tilde{B}(\theta) = B_1(u(\theta)) \tag{5}$$

para ciertas funciones derivables A_1 y B_1.

3. El mecanismo de composición

En 1985 (Proc. Roy. Soc. Edinburgh) Lloyd y Alwash dan una condición suficiente de centro que llamaremos mecanismo de composición. Dada una función $F(\theta)$ denotamos por $\tilde{F}(\theta) = \int_0^\theta F(s)ds$.

Definición 1. Las funciones $A(\theta)$ y $B(\theta)$ satisfacen la *Condición de composición* (CC) si existe una función derivable 2π-periódica $u(\theta)$ tal que

$$\tilde{A}(\theta) = A_1(u(\theta)) \text{ y } \tilde{B}(\theta) = B_1(u(\theta)) \tag{5}$$

para ciertas funciones derivables A_1 y B_1.

Teorema 1. Si las funciones $A(\theta)$ y $B(\theta)$ satisfacen la *Condición de composición* entonces la ecuación de Abel correspondiente tiene un centro.

3. El mecanismo de composición

3. El mecanismo de composición

Para demostrar el teorema basta considerar la ecuación

$$\dot{R} = A'(\theta)R^3 + B_1'(\theta)R^2$$

y comprovar que si $\psi(\theta)$ es solución de ésta ecuación entonces $\psi(u(\theta))$ és solución de la ecuación de Abel original.

3. El mecanismo de composición

Para demostrar el teorema basta considerar la ecuación

$$\dot{R} = A'(\theta)R^3 + B_1'(\theta)R^2$$

y comprovar que si $\psi(\theta)$ es solución de ésta ecuación entonces $\psi(u(\theta))$ és solución de la ecuación de Abel original.

En 1987 Alwash (Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect.) mostró mediante un ejemplo proveniente de los centros cuadráticos que la condición de composición no és necesaria para tener un centro.

4. Centros persistentes

4. Centros persistentes

Diremos que $A(\theta)$ y $B(\theta)$ dan lugar a un centro persistente si para todos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ la ecuación de Abel

$$\dot{r} = \lambda A(\theta) r^3 + \mu B(\theta) r^2,$$

tiene un centro.

Claramente si $A(\theta)$ y $B(\theta)$ verifican la condición de composición, lo mismo ocurre para $\lambda A(\theta)$ y $\mu B(\theta)$ y por lo tanto un centro de composición és un centro persistente.

El recíproco de este resultado és un problema abierto y ha generado mucha literatura en los últimos veinte años.

5. Persistencia y momentos. La ecuación de Riccati

5. Persistencia y momentos. La ecuación de Riccati

Consideremos la ecuación de Riccati:

$$\dot{r} = A(\theta)r^2 + B(\theta)r$$

que és integrable y tiene por solución

$$\phi(\theta, \rho) = \frac{\rho e^{\int_0^\theta B(s)ds}}{1 - \rho \int_0^\theta A(s) e^{\int_0^s B(t)dt}}$$

Así la condición de centro en este caso viene dada por las condiciones

$$\int_0^{2\pi} B(s)ds = 0 \text{ y } \int_0^{2\pi} A(s) e^{\int_0^s B(t)dt} = 0$$

Si además pretendemos que el centro sea persistente necesitaremos que $\int_0^{2\pi} A(s) e^{\int_0^s \lambda B(t)dt} = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

5. Persistencia y momentos. La ecuación de Riccati

Así pues, si consideramos

$$F(\lambda) = \int_0^{2\pi} A(s) e^{\int_0^s \lambda B(t) dt},$$

la condición de centro persistente en la ecuación de Riccati es equivalente a

$$\int_0^{2\pi} B(s) ds = 0 \quad \text{y } F(\lambda) = 0 \quad \text{para todo } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Como que F es analítica esta última condición es equivalente a

$$F^{(n)}(0) = \int_0^{2\pi} A(s) \tilde{B}(s)^n ds = 0,$$

donde $\tilde{B}(s) = \int_0^s B(t) dt$. Esta última condición es conocida como *anulación de los momentos de $A(s)$ respecto a $\tilde{B}(s)$*.

6. Persistencia y momentos en la ecuación de Abel

6. Persistencia y momentos en la ecuación de Abel

Teorema 2. Si la ecuación de Abel tiene un centro persistente, entonces los momentos de $A(s)$ respecto a $B(s)$ y los momentos de $B(s)$ respecto a $A(s)$ se anulan.

Como veremos más adelante el recíproco de este Teorema no és cierto.

Si una ecuación de Abel cumple la condición de composición entonces tiene un centro persistente lo que en particular implica la anulación de los momentos. El recíproco no és cierto pero su estudio ha dado lugar a una línea de investigación que ha generado resultados muy interesantes.

En particular algunos autores (Françoise, Yomdin, Christopher, Pakovich) han considerado el problema de la *ecuación de Abel polinomial*.

7. Momentos. La ecuación de Abel polinomial

7. Momentos. La ecuación de Abel polinomial

Consideremos la ecuación

$$\dot{x} = A(t)x^3 + B(t)x^2$$

donde A, B son polinomios. El problema de centro para esta ecuación consiste en dar condiciones sobre los polinomios A y B para que la aplicación a tiempo 1, que esta definida en un entorno de la solución $x = 0$, sea la identidad.

7. Momentos. La ecuación de Abel polinomial

Consideremos la ecuación

$$\dot{x} = A(t)x^3 + B(t)x^2$$

donde A, B son polinomios. El problema de centro para esta ecuación consiste en dar condiciones sobre los polinomios A y B para que la aplicación a tiempo 1, que esta definida en un entorno de la solución $x = 0$, sea la identidad.
Para este problema, uno puede definir de manera paralela las nociones de centro de composición y de centro persistente y el Teorema 2 sigue siendo válido en este contexto. La condición de composición implica la anulación de momentos. El estudio de la caracterización de la anulación de los momentos en esta situación ha sido recientemente resuelto por F. Pakovich y M. Muzychuk (2009 P.L.M.S).

8. Momentos. La ecuación de Abel polinomial

8. Momentos. La ecuación de Abel polinomial

Teorema 3. Los momentos de $A(t)$ respecto $\tilde{B}(t)$ se anulan si y solo si existen polinomios $w_1(t), \ldots, w_k(t)$ con $w_i(0) = w_i(1)$ de manera que

$$\tilde{B}(t) = B_1(w_1(t)) = \ldots = B_k(w_k(t)) \text{ y } \tilde{A}(t) = \sum_{i=1}^{k} A_i(w_i(t))$$

con $B_i(t), A_i(t) \in \mathbb{R}[t]$.
El siguiente ejemplo trigonométrico (que proviene de un campo polinomial cuadrático) muestra que un análogo del Teorema 3 para el caso trigonométrico no és cierto.

8. Momentos. La ecuación de Abel polinomial

Teorema 4. La ecuación de Abel $\dot{r} = A(\theta)r^3 + B(\theta)r^2$, con

$$A(\theta) = a\cos(2\theta) + b\sin(2\theta) + c\sin(6\theta) \text{ y } B(\theta) = cos(3\theta)$$

tiene un centro si i solo si $a = 0$, (centro de composición) o $a^2 = 3b^2$ (centro de composición) o $c = 1/32$ (no de composición, no persistente). Por otra parte

$$\int_0^{2\pi} A(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} B(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} A(\theta)\tilde{B}(\theta)^n d\theta = \int_0^{2\pi} B(\theta)\tilde{A}(\theta)^n d\theta = 0$$

Además si $c = 1/32$ entonces para casi todo $a, b \in \mathbb{R}$

$$\tilde{A}(\theta) = a/2\sin(2\theta) - b/2\cos(2\theta) - 1/192\cos(6\theta)$$

no es función polinómica f de ningún polinomio trigonométrico (exceptuando el caso trivial $f = Id$) y $\tilde{B}(\theta)$ no és función polinómica de $\tilde{A}(\theta)$.

9. Conclusiones

Condición de composición $\Rightarrow$ persistencia $\Rightarrow$ anulación de momentos y

anulación de momentos $\not\Rightarrow$ *centro*

9. Conclusiones

Condición de composición $\Rightarrow$ persistencia $\Rightarrow$ anulación de momentos y

anulación de momentos $\not\Rightarrow$ *centro*

Observemos que si $A(\theta)$ y $B(\theta)$ cumplen la condición de composición entonces la ecuación de Abel

$$\dot{r} = (\lambda A(\theta) + \mu B(\theta))\, r^3 + (\delta A(\theta) + \gamma B(\theta))\, r^2$$

tiene un centro para todo $\lambda, \mu, \delta, \gamma \in \mathbb{R}$
En particular se cumple que

$$\int_0^{2\pi} A(\theta)\tilde{A}(\theta)^m \tilde{B}(\theta)^n d\theta = \int_0^{2\pi} B(\theta)\tilde{A}(\theta)^m \tilde{B}(\theta)^n d\theta = 0$$

para todo $n, m \in \mathbb{N}$.

9. Conclusiones

Observemos también que si $A(\theta)$ y $B(\theta)$ cumplen la condición de composición entonces la ecuación

$$\dot{r} = A(\theta)r^m + B(\theta)r^n$$

tiene un centro para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$.
Cabe preguntarse si alguna de estas condiciones caracteriza los centros de composición
El ejemplo del Teorema 4 en el que

$$A(\theta) = a\cos(2\theta) + b\sin(2\theta) + 1/32\sin(6\theta) \text{ y } B(\theta) = cos(3\theta)$$

que cumplía la anulación de momentos no cumple la hipótesis de anulación de los momentos generalizados.

10. Obtención de centros polinomiales a partir de centros de composición

10. Obtención de centros polinomiales a partir de centros de composición

Volvemos ahora a fijar nuestra atención en el problema centro-foco en los campos polinomiales de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + P_n(x, y), \\ \dot{y} &= x + Q_n(x, y), \end{aligned} \tag{6}$$

donde P_n y Q_n son polinomios homogéneos de grado n. Si denotamos por X_n los campos de esta forma y V_n los campos de X_n con un centro en el origen, hay dos estratos perfectamente identificados en V_n. Los campos hamiltonianos y los campos reversibles respecto a una recta.

10. Obtención de centros polinomiales a partir de centros de composición

Volvemos ahora a fijar nuestra atención en el problema centro-foco en los campos polinomiales de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + P_n(x,y), \\ \dot{y} &= x + Q_n(x,y), \end{aligned} \tag{6}$$

donde P_n y Q_n son polinomios homogéneos de grado n. Si denotamos por X_n los campos de esta forma y V_n los campos de X_n con un centro en el origen, hay dos estratos perfectamente identificados en V_n. Los campos hamiltonianos y los campos reversibles respecto a una recta.

Es fàcil ver que ambos estratos son centros de composición en la correspondiente ecuación de Abel.

10. Obtención de centros polinomiales a partir de centros de composición

10. Obtención de centros polinomiales a partir de centros de composición

En el caso hamiltoniano ($P_n = -\frac{\partial H_{n+1}}{\partial y},\ Q_n = \frac{\partial H_{n+1}}{\partial x}$) $\tilde{A}(\theta)$ y $\tilde{B}(\theta)$ dependen funcionalmente de la función $H_{n+1}(\cos(\theta), \sin(\theta))$ que és un polinomio trigonométrico homogéneo de grado $n+1$.

10. Obtención de centros polinomiales a partir de centros de composición

En el caso hamiltoniano ($P_n = -\frac{\partial H_{n+1}}{\partial y},\ Q_n = \frac{\partial H_{n+1}}{\partial x}$) $\tilde{A}(\theta)$ y $\tilde{B}(\theta)$ dependen funcionalmente de la función $H_{n+1}(\cos(\theta), \sin(\theta))$ que és un polinomio trigonométrico homogéneo de grado $n+1$.
En el caso reversible las correspondientes $\tilde{A}(\theta)$ y $\tilde{B}(\theta)$ dependen funcionalmente de un polinomio trigonométrico de grado 1 que no es más que la dirección de reversibilidad.

10. Obtención de centros polinomiales a partir de centros de composición

En el caso hamiltoniano ($P_n = -\frac{\partial H_{n+1}}{\partial y},\ Q_n = \frac{\partial H_{n+1}}{\partial x}$) $\tilde{A}(\theta)$ y $\tilde{B}(\theta)$ dependen funcionalmente de la función $H_{n+1}(\cos(\theta), \sin(\theta))$ que és un polinomio trigonométrico homogéneo de grado $n+1$.
En el caso reversible las correspondientes $\tilde{A}(\theta)$ y $\tilde{B}(\theta)$ dependen funcionalmente de un polinomio trigonométrico de grado 1 que no es más que la dirección de reversibilidad.
Nos preguntamos por la existencia de campos en V_n que den lugar a centros de composición en la correspondiente ecuación de Abel, con factor de composición de grado mayor que 1 y menor que $n+1$. La siguiente observación es un primer primer paso en esta dirección

10. Obtención de centros polinomiales a partir de centros de composición

10. Obtención de centros polinomiales a partir de centros de composición

Chavarriga y Giné en los años 90 prueban el siguiente resultado:
Teorema 6. Si el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + P_n(x, y), \\ \dot{y} &= x + Q_n(x, y), \end{aligned} \tag{7}$$

se escribe en polares

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \rho^n \lambda g'(\theta), \\ \dot{\theta} &= 1 + g(\theta)\rho^{n-1}, \end{aligned} \tag{8}$$

entonces el sistema tiene un centro en el origen.
Ellos prueban el teorema encontrando un factor integrante. Observemos sin embargo que en este caso el centro es de composició con factor igual a $g(\theta)$. Este resultado le permite describir nuevas clases de centros (no hamiltonianos, no reversibles) en X_n para $n = 4, 5, 6$.

10. Obtención de centros polinomiales a partir de centros de composición

10. Obtención de centros polinomiales a partir de centros de composición

El siguiente Teorema es un Corolario de un resultado de Seok Hur publicado en 2001 en C. R. Acad. Sci. Paris

Teorema 5. Sea $u(x,y)$ un polinomio homogéneo de grado $k \leq n+1$, $f(x,y), g(x,y)$ polinomios casi-homogéneos tales que $f\left(x^2+y^2, u(x,y)\right)$ y $g\left(x^2+y^2, u(x,y)\right)$ són polinomios homogéneos de grado $n-1$ y $n-k+1$ respectivamente. Entonces el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\left(1+f\left(x^2+y^2, u(x,y)\right)\right) y - g\left(x^2+y^2, u(x,y)\right) \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ \dot{y} &= \left(1+f\left(x^2+y^2, u(x,y)\right)\right) x + g\left(x^2+y^2, u(x,y)\right) \frac{\partial u}{\partial x}(x,y), \end{aligned} \tag{9}$$

pertenece a V_n y su correspondiente ecuación de Abel es de composición con factor $\mu(\theta) = u\left(\cos(\theta), \sin(\theta)\right)$. Todo centro de composición en X_n és de esta forma.

10. Obtención de centros polinomiales a partir de centros de composición

10. Obtención de centros polinomiales a partir de centros de composición

Este resultado permite encontrar centros no hamiltonianos y no reversibles en X_n $(n \geq 8)$ con un factor de composición de grado arbitrario y que no son del tipo descrito por el resultado de Giné y Chavarriga.