

Dinámica de la familia de métodos iterativos de Tchebychev-Halley

Ddays,
Universitat Jaume I
24-26 Octubre 2012

Alicia Cordero, Juan R. Torregrosa, Pura Vindel

30 de octubre de 2012

- 1 La familia Tchebychev-Halley
 - Operador
 - Estudio de los puntos fijos
 - Puntos críticos
- 2 Espacio de parámetros
- 3 La cabeza del gato
 - La frontera
- 4 El cuerpo del gato
 - La frontera
- 5 Dentro del collar
- 6 En la frontera del collar
- 7 Fuera del conjunto gato
- 8 Conclusiones
- 9 Bibliografía

La familia Tchebychev-Halley

El operador correspondiente a la familia de métodos de Tchebychev-Halley es:

$$G(z) = z - \left(1 + \frac{1}{2} \frac{L_f(z)}{1 - \alpha L_f(z)} \right) \frac{f(z)}{f'(z)}$$

donde:

$$L_f(z) = \frac{f(z) f''(z)}{(f'(z))^2}$$

- $\alpha = 0$, Tchebychev
- $\alpha = 1/2$, Halley
- $\alpha = 1$, Super-Halley
- $\alpha = \pm\infty$, Newton.

La familia Tchebychev-Halley

Si $p(z) = z^2 + c$,

$$G_p(z) = \frac{z^4(-3 + 2\alpha) + 6cz^2 + c^2(1 - 2\alpha)}{4z(z^2(-2 + \alpha) + \alpha c)}$$

c puede eliminarse mediante la aplicación:

$$h(z) = \frac{z - i\sqrt{c}}{z + i\sqrt{c}}$$

cuyas propiedades son $h(\infty) = 1$, $h(i\sqrt{c}) = 0$, $h(-i\sqrt{c}) = \infty$.

$$O_p(z) = (h \circ G_p \circ h^{-1})(z) = z^3 \frac{z - 2(\alpha - 1)}{1 - 2(\alpha - 1)z}$$

$$O_p(z) = z \Rightarrow z = 0, z = 1, z = \frac{-3 + 2\alpha \pm \sqrt{5 - 12\alpha + 4\alpha^2}}{2} = s_1, s_2$$

$O_p(\infty) = \infty$, luego ∞ también es un punto fijo, superatractor.

Además: $s_1 = \frac{1}{s_2}$, $s_1 = s_2 = \pm 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}, \alpha = \frac{5}{2}$

Por tanto:

- $\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow z = \frac{-3 + 2\alpha \pm \sqrt{5 - 12\alpha + 4\alpha^2}}{2} = -1$ con multiplicidad 2 \Rightarrow Puntos fijos: $0, \infty, 1, -1$
- $\alpha = \frac{5}{2} \Rightarrow z = \frac{-3 + 2\alpha \pm \sqrt{5 - 12\alpha + 4\alpha^2}}{2} = 1$, entonces $z = 1$ con multiplicidad 3 \Rightarrow Puntos fijos: $0, \infty, 1$
- $\alpha \neq \frac{1}{2}, \frac{5}{2} \Rightarrow$ Puntos fijos: $0, \infty, 1, s_1, s_2$

$$O'_p(z) = 2z^2 \frac{3(1-\alpha) + 2z(3-4\alpha+2\alpha^2) + 3z^2(1-\alpha)}{(1-2(\alpha-1)z)^2}$$

Luego 0 e ∞ son siempre superatractores.

Lema

Estabilidad de $z = 1$:

- Si $|\alpha - \frac{13}{6}| < \frac{1}{3}$ entonces $z = 1$ es un atractor. Para $\alpha = 2$ entonces es superatractor.
- Si $|\alpha - \frac{13}{6}| = \frac{1}{3}$, $z = 1$ es un punto parabólico.
- Finalmente, $z = 1$ es un punto fijo repulsor para cualquier otro valor de α .

Lema

Estabilidad de los puntos extraños

$$s_{1,2} = \frac{-3 + 2\alpha \pm \sqrt{5 - 12\alpha + 4\alpha^2}}{2}$$

- Si $|\alpha - 3| < \frac{1}{2}$ entonces s_1 y s_2 son puntos atractores; en particular, si $\alpha = 3$ $s_{1,2} = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$ son superatractores
- Si $|\alpha - 3| = \frac{1}{2}$ entonces s_1 y s_2 son parabólicos, en particular, si $\alpha = \frac{5}{2} \Rightarrow s_1 = s_2 = 1$.
- Para cualquier otro valor de $\alpha \in \mathbf{C}$, s_1 y s_2 son puntos fijos repulsivos.

$$O'_p(z) = 0$$

$$z = 0, \infty, z = \frac{3-4\alpha+2\alpha^2 \pm \sqrt{-6\alpha+19\alpha^2-16\alpha^3+4\alpha^4}}{3(\alpha-1)} = c_1, c_2$$

Además, $c_1 = \frac{1}{c_2}$, por lo tanto

$$c_1 = c_2 = \pm 1 \Leftrightarrow -6\alpha + 19\alpha^2 - 16\alpha^3 + 4\alpha^4 = 0 \Rightarrow \alpha = 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2.$$

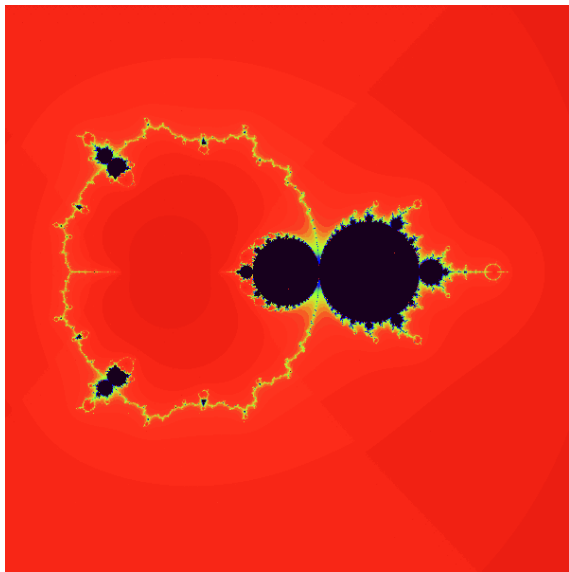
El número de punto críticos depende de α :

- Si $\alpha = 0$, $c_1 = c_2 = -1$, que es un punto pre-periódico.
- Si $\alpha = \frac{1}{2}$, $c_1 = c_2 = -1 = s_1 = s_2$, es repulsor.
- Si $\alpha = \frac{3}{2}$, $c_1 = c_2 = 1$ es repulsor.
- Si $\alpha = 2$, $c_1 = c_2 = 1$ es superatractor.
- Para cualquier otro valor de $\alpha \in \mathbf{C}$ hay dos puntos críticos distintos.

Además

- Si $\alpha \rightarrow 1$, entonces $c_1 \rightarrow 0$ y $c_2 \rightarrow \infty \Rightarrow O_p(z) = z^4$.
- Si $\alpha \rightarrow \pm\infty$ entonces $c_1 \rightarrow 0$ y $c_2 \rightarrow \pm\infty \Rightarrow O_p(z) = z^2$.

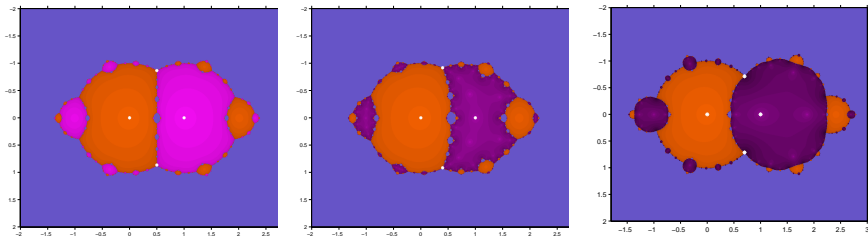
Espacio de parámetros



La cabeza

La cabeza del gato corresponde a valores de α donde $z = 1$ es atractor, es decir $|\alpha - \frac{13}{6}| < \frac{1}{3}$.

Cuando $\alpha = 2$ los puntos críticos $c_1 = c_2 = 1$, por lo que $z = 1$ es un punto fijo superatractor.



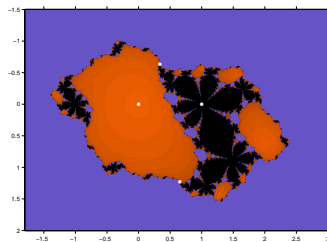
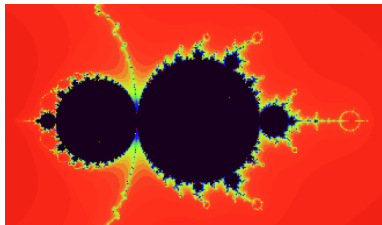
Planos de dinámicos para $\alpha = 2$, $\alpha = 1,9$ y $\alpha = 2,2$.

La frontera de la cabeza

La frontera es una circunferencia $|\alpha - \frac{13}{6}| = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{13}{6} + \frac{1}{3}e^{i\theta}$.

$$O'_p(1) = \frac{2e^{i\theta} + 1}{2 + e^{i\theta}}, \quad |O'_p(1)| = 1$$

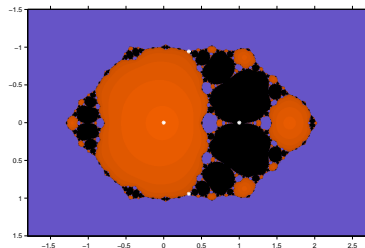
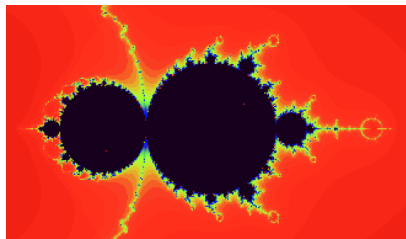
Para cada θ , α está en la intersección con los distintos bulbos \Rightarrow aparecen ciclos periódicos



Plano dinámico para $\alpha = \frac{13}{6} + (\frac{1}{3} + 0,01)e^{\frac{2i\pi}{3}}$

La frontera de la cabeza

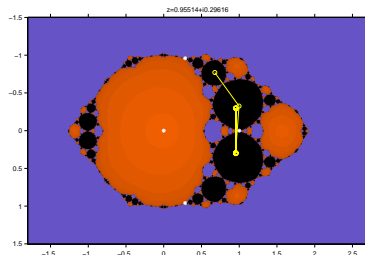
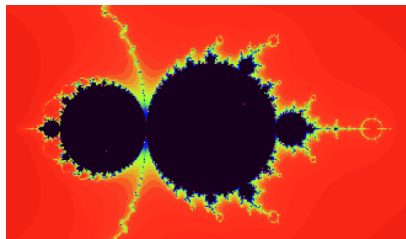
$$\theta = \pi, \alpha = \frac{11}{6}$$



$z = 1$ tiene multiplicidad 1 \Rightarrow frontera de dos cuencas parabólicas.

La frontera de la cabeza

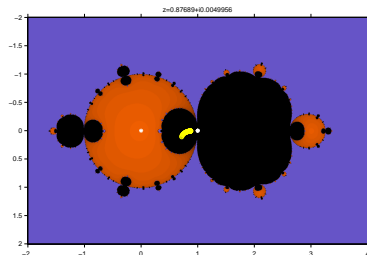
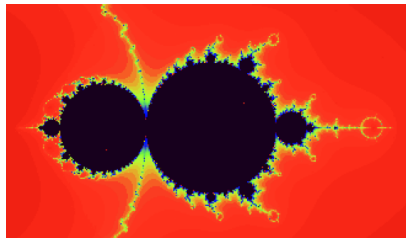
Plano dinámico para $\alpha = \frac{11}{6} - 0,05$.



En el bulbo de la izquierda aparece un ciclo atractor de periodo 2.

La frontera de la cabeza

$$\theta = 0, \alpha = \frac{5}{2}.$$

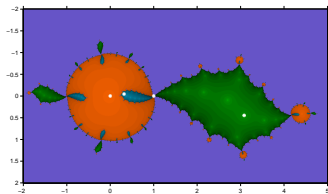
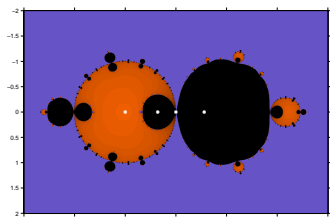
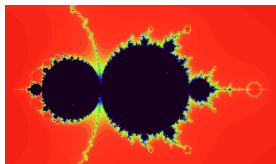


$z = 1$ tiene multiplicidad 3 \Rightarrow frontera de dos cuencas atractoras.

El cuerpo

El cuerpo corresponde $|\alpha - 3| < \frac{1}{2}$.

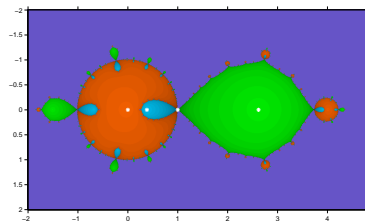
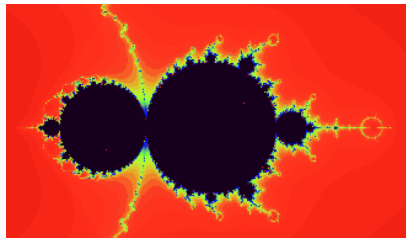
$z = 1$ se convierte en repulsor y s_1 y s_2 en atractores \Rightarrow Dos cuencas de atracción, un crítico en cada cuenca.



Planos dinámicos para $\alpha = 2,6$ y $\alpha = 3,2 + 0,2i$

El cuerpo

Si $\alpha = 3$, $s_1 = c_1$ y $s_2 = c_2$ superatractores.

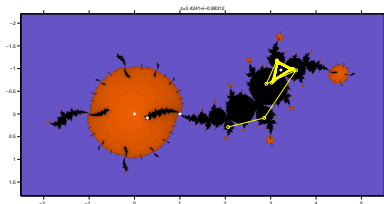
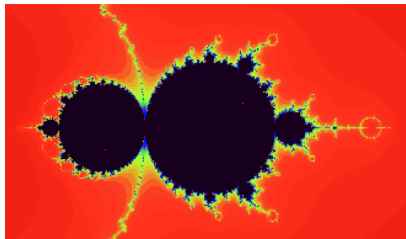


La frontera del cuerpo

$|\alpha - 3| = \frac{1}{2}$, $\alpha = 3 + \frac{1}{2}e^{i\theta} \Rightarrow s_1$ y s_2 son parabólicos

$$O'(s_1) = O'(s_2) = -e^{i\theta} = e^{i(\pi+\theta)}$$

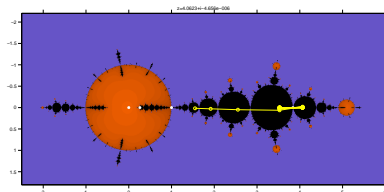
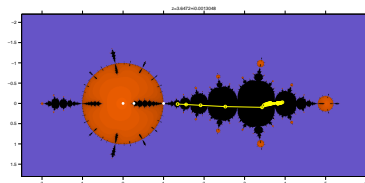
para cada valor de $\theta \Rightarrow$ puntos de intersección con los bulbos donde aparecen pares de ciclos atractores.



Ciclos de periodo 3: $\alpha = 3 + 0,51e^{\frac{\pi i}{3}}$, $\alpha = 3 + 0,51e^{\frac{5\pi i}{3}}$.

La frontera del cuerpo

$\theta = 0$, $\alpha = \frac{7}{2}$, s_1 y s_2 son parabólicos \Rightarrow están en la intersección con el bulbo que contiene ciclos de periodo 2.

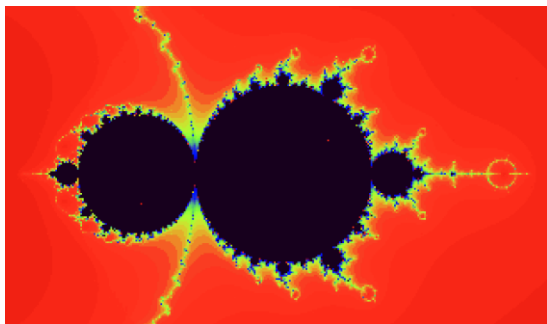


Planos dinámicos para $\alpha = 3,5$ y $\alpha = 3,55$.

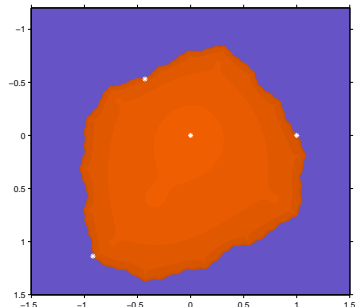
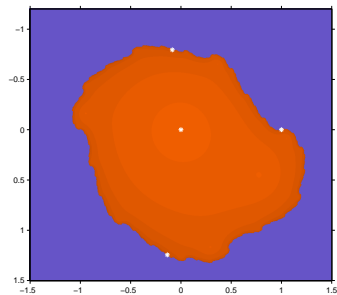
Lema

Si $|\alpha - 1| \leq \frac{1}{2}$ entonces, el plano dinámico es el mismo que z^n .

- Si $\alpha = 1$ entonces $O_p(z) = z^4$,
- Si $\alpha = \frac{1}{2}$ entonces $O_p(z) = z^3$,
- Si $\alpha = \frac{3}{2}$ entonces $O_p(z) = -z^3$.

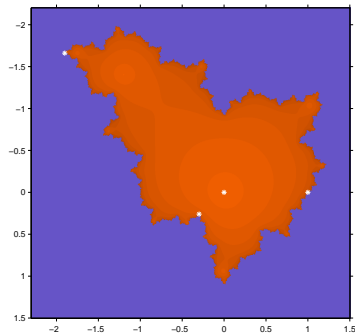
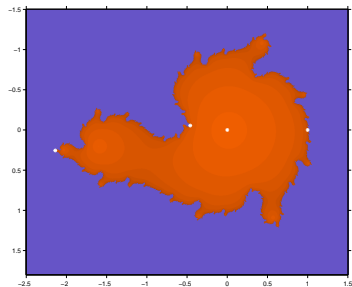


Dentro del collar



Planos dinámicos para $\alpha = 1 + 0,35e^{\frac{2\pi i}{3}}$ y $\alpha = 1 + 0,45e^{\frac{\pi i}{6}}$.

Dentro del collar



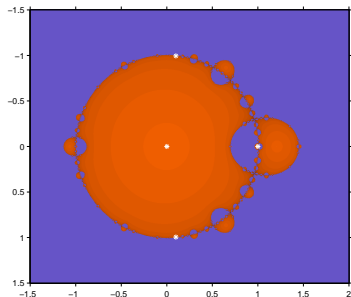
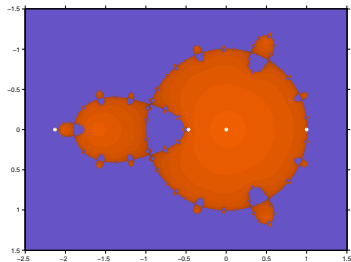
Planos dinámicos para $\alpha = 0,2 + 0,1i$ $\alpha = 0,4 - 0,7i$.

Sobre el collar

$0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ y $\alpha \in \mathbf{R} \Rightarrow$ antena izquierda.

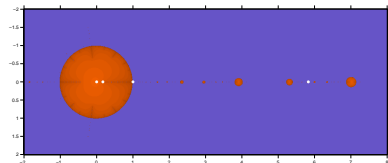
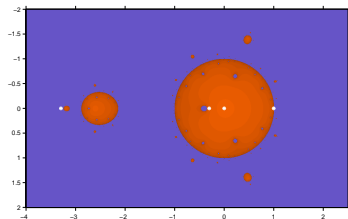
Lema

El plano dinámico para valores $\alpha \in \mathbf{R}$ y $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ consta de dos cuencas de atracción, $A(0)$ and $A(\infty)$, con infinitas pre-imágenes.









Planos dinámicos para $\alpha = 0.2$ and $\alpha = 1.6$.

El conjunto de Julia es desconexo



Planos dinámicos para $\alpha = -0,3$ and $\alpha = 4,5$.

- El comportamiento dinámico de la familia Tchebychev-Halley es muy rico, como muestra su plano de parámetros.
- Numéricamente, son especialmente interesantes:
 - los valores de α situados dentro del collar (especialmente $\alpha = \frac{3}{2}$) cuyo conjunto de Julia es conexo, o
 - aquellos que están fuera del conjunto gato (Julia desconexo).
- El análisis dinámico de las familias de métodos iterativos es una buena herramienta para el análisis de su estabilidad.
- Líneas abiertas:
 - Profundizar en la comprensión dinámico del conjunto gato.
 - Completar el análisis con funciones no polinómicas.
 - Extender el estudio a otras familias paramétricas de métodos iterativos.

-  S.Amat, S.Busquier, J.M. Gutiérrez. *Geometric constructions of iterative functions to solve nonlinear equations*. J. of Computational and Applied Mathematics **157** (2003) 197205.
-  P. Blanchard. *The Dynamics of Newton's Method*. Proc. of Symposia in Applied Math. **49** (1994) 139-154.
-  P. Blanchard. *Complex Analytic Dynamics on the Riemann Sphere*. Bull. of the AMS. **11** no. 1 (1984) 85-141.
-  A. Douady and J.H.Hubbard. *On the dynamics of polynomials-like mappings*. Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. (Paris) **18** (1985) 287-343.
-  N. Fagella. *Invariants in dinàmica complexa*. Butlletí de la Soc. Cat. de Matemàtiques, **23**(1) (2008) 29-51.
-  J. Milnor. *Dynamics in one complex variable*. Stony Brook IMS preprint (1990).