

Dinámica no-autónoma con aplicaciones
a redes neuronales de tipo Hopfield

Rafael Obaya,

Universidad de Valladolid.

Resultados en cooperación con Sylvia Novo, Carmen Núñez
Ane M. Sanz, Victor M. Villarragut, M^a E. Sansaturio y
Oscar Arretia y otras colaboraciones.

Redes neuronales biológicas. Neurociencia: estructura y desarrollo de la bioquímica, farmacología y la patología del sistema nervioso

Redes neuronales artificiales (ANN) paradigma de aprendizaje y procesamiento automático inspirado en la arquitectura y funcionamiento de las redes biológicas. Es un área interdisciplinaria: neurólogos, ingenieros eléctricos, informáticos, físicos, matemáticos, etc.

SIAM, Nonlinearity, I. J. Bifurcation and Chaos

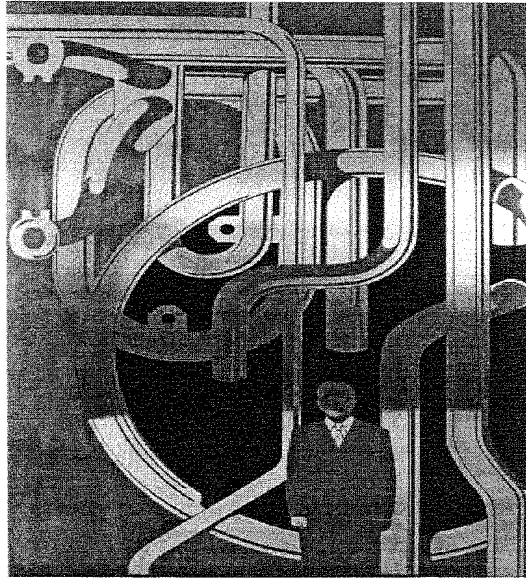
Physica D, Physica A, Physica E

Neural Networks, IEEE Trans. Neural Networks

IEEE Trans. Syst. Man, Cybernetics, IEEE Trans. Circuit Systems

>2000 = 5497 (26 libros) , >2010 485 Referencias.

Redes Neuronales, 2009/2010



**ANTONIO JOSÉ SERRANO
EMILIO SORIA OLIVAS
JOSE DAVID MARTÍN**

**DEPARTAMENT:
ENGINYERIA ELECTRÒNICA**

**ESCOLA TÈCNICA SUPERIOR
D'ENGINYERIA (ETSE)**

PROGRAMA DE DOCTORAT

Curs 2009/2010



Tutorial de Redes Neuronales

Este tutorial se ha confeccionado en la universidad Politécnica de Madrid-UPM (España), bajo la dirección del Dr. Diego Andina de la Fuente del departamento de Señales, Sistemas y Radiocomunicaciones (SSR), Grupo de Circuitos (GC) y desarrollado con la participación del M. en I. Antonio Vega Corona de la Facultad de Ingeniería Mecánica, Eléctrica y Electrónica de la Universidad de Guanajuato dentro del Programa de Mejoramiento del Profesorado (**PROMEP**).

La versión Inglesa ha sido **escrita** por el alumno **Francisco J. Rodríguez**, en el departamento de Electronic and Electrical Engineering, de la Universidad de Strahclyde (Glasgow), bajo la supervisión del **Dr. William A. Sandham**, dentro del marco del programa ERASMUS de la Unión Europea.

Redes Neuronales

<http://users.dsic.upv.es/asignaturas/facultad/iarf/rf/rna/rna.html>

Nombre: **REDES NEURONALES**

Semestre: **5A**

Código propuesto: **RNA**

Especialidad: **SOFTWARE**

Intensificación: **INTELIGENCIA ARTIFICIAL**

Créditos: **6 (4 Teoría + 2 Prácticas)**

Profesores: **Francisco Casacuberta, María José Castro**

Profesore Responsable: **Francisco Casacuberta (fcn@dsic.upv.es Ext:9350)**

Co-Prerrequisitos (recomendados): **IAT, APP, RF**

OBJETIVOS:

El primer objetivo de la asignatura es el introducir al alumno en el apasionante campo de las Redes Neuronales Artificiales, resaltando sus posibilidades y sus limitaciones. El segundo objetivo es el formar al alumno en el diseño de Sistemas Conexionistas para la resolución de problemas reales de predicción y de interpretación del mundo real, tales como el reconocimiento de imágenes, el diagnóstico médico, la predicción metereológica, la predicción bursátil, etc.

Caso 4. 6 de marzo de 1996

"Aplicaciones de las Redes Neuronales en Contabilidad y Finanzas."

Autores: Carlos Serrano Cinca y José Luis Gallizo Larraz, Departamento de Contabilidad y Finanzas, Universidad de Zaragoza.

Area de conocimiento: Economía Financiera y Contabilidad

Disciplina: Sistemas Informativos Contables

APLICACIONES DE REDES NEURONALES EN ECONOMÍA

Aragón Torre, Alberto¹

Calzada Arroyo, J. María

García Güemes, Alfredo

Pacheco Bonrostro, Joaquín

Resumen

La metodología de las Redes Neuronales Artificiales, está siendo usada con profusión, dentro del campo de la Economía, hasta tal punto que existe una publicación bimensual, que trata específicamente estas aplicaciones a los mercados financieros: NeuroveSt Journal. En este trabajo, se presentan las principales líneas de investigación existentes, a continuación la que nosotros estamos siguiendo, con algunos resultados iniciales, para finalizar con las líneas a seguir y una selección bibliográfica.

Carlos Serrano
Cinca

*Dpto. de Contabilidad
y Finanzas.
Univ. de Zaragoza*

Bonifacio Martín
del Brío (*)

*Dpto. de Ingeniería
Eléctrica e Informática.
Univ. de Zaragoza*

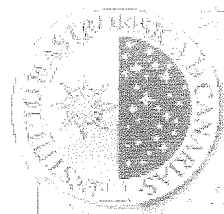
PREDICCIÓN DE LA QUIEBRA BANCARIA MEDIANTE EL EMPLEO DE REDES NEURONALES ARTIFICIALES

0. *Resumen.—Palabras clave.—1. Introducción.—2. Redes neuronales artificiales e información contable.—3. Aplicación práctica: modelos neuronales propuestos para la predicción de crisis empresariales: 3.1. Introducción. 3.2. Perceptrón Multicapa: 3.2.1. Selección de la muestra y sus variables. 3.2.2. Resultados. 3.3. Mapas Autoorganizados. Aplicación al estudio de la evolución temporal del estado financiero de un Banco.—4. Conclusiones.—Bibliografía. Base de datos utilizada.—Valores de los «ratios» utilizados en el estudio.*



Introducción a las Redes Neuronales y su aplicación a la Investigación Astrofísica

Patricio García Báez
pgarcia@ull.es



Investigación
Astrofísica

La sinapsis se inicia con una descarga química que origina una corriente eléctrica (transmisión del impulso nervioso). Una vez que este impulso alcanza el extremo del axón la propia neurona segrega un tipo de compuestos químicos (neurotransmisores) que se depositan en el espacio sináptico. Estas sustancias (nora adrenalina y acetilcolina) entre otras son las encargadas de excitar o inhibir la célula receptora (célula post sináptica).

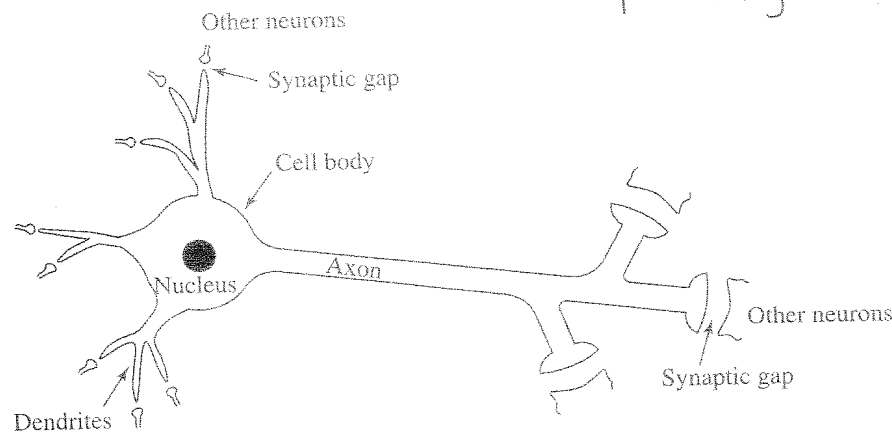


Figure 1.1.1. Schematic structure of a typical neuron.

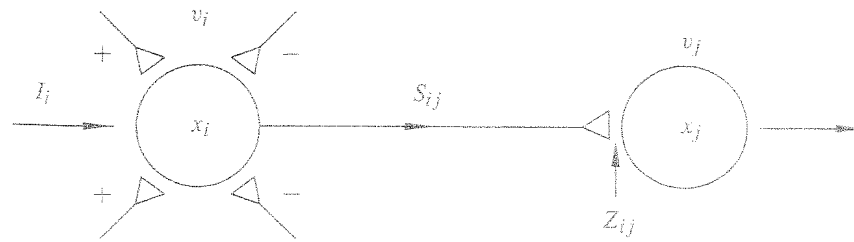


Figure 2.1.1. Schematic diagram of a neuron and a network: Neuron v_i with potential x_i relative to equilibrium sends a signal S_{ij} along the axon to a target neuron v_j . The signal affects the target neuron with a coupling strength Z_{ij} . The signal may be excitatory ($Z_{ij} > 0$) or inhibitory ($Z_{ij} < 0$). Other inputs I_i to the neuron model external stimuli.

Supongamos que la red está formada por n neuronas v_1, \dots, v_n

$x_i(t) \equiv$ desviación del potencial de la neurona i del equilibrio

$Z_{ij}(t) \equiv$ coeficiente de acoplamiento por unidad de señal en la conexión [excitatoria] de la neurona j con i .
[inhibitoria]

Obtenemos

$$\frac{dx_i}{dt} = \left(\frac{dx_i}{dt}\right)_{\text{interna}} + \left(\frac{dx_i}{dt}\right)_{\text{excitatoria}} + \left(\frac{dx_i}{dt}\right)_{\text{inhibitoria}} + \left(\frac{dx_i}{dt}\right)_{\text{estimulo}}$$

$$\left(\frac{dx_i}{dt}\right)_{\text{interna}} = -A_i(t, x_i) \cdot x_i, \quad A_i(x_i) > 0$$

$$\left(\frac{dx_i}{dt}\right)_{\text{excitatorio}} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n S_{ki} Z_{ki}(t)$$

donde S_{ki} es la función de señal o de activación

$$S_{ki}(t) = f_k(x_k(t - z_{ki}) - \Gamma_k)$$

$$\left(\frac{dx_i}{dt}\right)_{\text{inhibitorio}} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n S_{ki} C_{ki}(t)$$

Se supone que los coeficientes de acoplamiento excitatorios verifican la ley de Hebb

$$\frac{dZ_{ij}}{dt} = -B_{ij}(Z_{ij}) Z_{ij} + d_{ij} f_i(x_i(t - z_{ij}) - \Gamma_i) [x_j]^+$$

donde $B_{ij}(Z_{ij}) > 0$, $d_{ij} \geq 0$ y $[z]^+ = \begin{cases} z, & z \geq 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$

Alrededor de los estímulos externos obtenemos el modelo

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) = & -A_i(t, x_i(t))x_i(t) + \sum_{k=1, k \neq i}^n f_k(x_k(t) - z_{ki}) - \Gamma_k |z_{ki}| \\ & - \sum_{k=1, k \neq i}^n f_k(x_k(t) - z_{ki}) - \Gamma_k |z_{ki}| C_{ki}(t) + I_i(t). \quad (\text{STM}) \end{aligned}$$

$$\dot{z}_{ij}(t) = -B_{ij}(z_{ij}(t))z_{ij}(t) + d_{ij} f_i(x_i(t) - z_{ij}) - \Gamma_i |x_i| \quad (\text{LTM})$$

Deducimos el llamado "STM shunting equation"

que pertenece al modelo de Hodgkin y Huxley (1952) que describe el voltaje $V(t)$ de una membrana

$$C \frac{dV}{dt} = (V^+ - V)g^+ + (V^- - V)g^- + (V^P - V)g^P$$

donde C es la capacitancia, V^+ , V^- , V^P son constantes

que proporcionan puntos de saturación excitatorio, inhibitorio y pasivo i g^+ , g^- y g^p representen la conductancia excitatoria, inhibitoria y pasiva. (Frecuentemente V^+ representa el punto de saturación de un canal de Na^+ y V^- de un canal de K^+)
 En cada neurona V_i tenemos

$$V = x_i, \quad V^+ = B_i, \quad V^- = -D_i, \quad V^p = 0$$

$$g^+ = I_i + \sum_{k \neq i} S_{ki}^{(+)} Z_{ki}^{(+)} = I_i + \sum_{k \neq i} Z_{ki}^{(+)} f_i(x_i(t - z_{ij}) - \tau_i)$$

$$g^- = J_i + \sum_{l \neq i} S_{li}^{(-)} Z_{li}^{(-)} = J_i + \sum_{l \neq i} Z_{li}^{(-)} f_i(x_i(t - z_{ij}) - \tau_i)$$

$$g^p = A, \quad C = 1 \quad (\text{escala adecuada})$$

Obtenemos

$$x_i' = -A_i x_i + (B_i - x_i) \cdot \left[\sum_{k \neq i} S_{ki}^{(+)} Z_{ki}^{(+)} + I_i \right]$$

$$- (x_i + D_i) \cdot \left[\sum_{l \neq i} S_{li}^{(-)} Z_{li}^{(-)} + J_i \right]$$

$1 \leq i \leq n.$

Modelo neuronal de Cohen - Grossberg

M. Cohen, S. Grossberg IEEE Trans. System, Man Cybernet. (1983)

$$x'_i = a_i(x_i) \left[b_i(x_i) - \sum_{j=1}^n w_{ij} f_j(x_j) \right] \quad 1 \leq i \leq n$$

con condiciones

(w_{ij}) simétrica, $a_i(\xi)$ es continua, $b_i(\xi)$ es continua en $\xi > 0$

$a_i(\xi) > 0$, $\xi > 0$, $f_i(\xi)$ es C^1 , $f'_i(\xi) \geq 0$ para $\xi > 0$

Significa que la actividad de la neurona i decrece si y solo si el input recibido desde las otras neuronas excede un valor intrínseco de actividad dado por la función $b_i(x)$ y el factor de amplificación $a_i(x)$ es positivo.

Importantes modelos anteriores pueden adquirirse esta representación (shunting on-center of surround network)

$$x'_i = -A_i x_i + (B_i - x_i) (I_i + h(x_i)) - (x_i + C_i) \left[J_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n F_{ij} g_j(x_j) \right]$$

$(B_i - x_i) (I_i + h_i(x_i))$ input excitatorio
 $-(x_i + C_i) \left[J_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n F_{ij} g_j(x_j) \right]$ input inhibitorio

Además

$$y_i = x_i + C_i$$

$$y'_i = a_i(y_i) \left[b_i(y_i) - \sum_{j=1, j \neq i}^n w_{ij} F_{ij} f_j(y_j) \right]$$

donde

$$a_i(y_i) = y_i, \quad w_{ij} = F_{ij}, \quad f_i(y_i) = g_i(y_i - C_i)$$

$$b_i(y_i) = \frac{1}{y_i} \left[A_i C_i - (A_i + J_i) y_i + (B_i + C_i - y_i) (I_i + h_i(y_i - C_i)) \right]$$

La simetría requiere $F_{ij} = F_{ji}$, La condición de monotonía es $g'_i(x) \geq 0$.

Los R.N.A. de Hopfield fueron introducidos en

J. Hopfield, Proc. Nat. Acad. Sci U.S.A. (1982)

en términos de un sistema de EDOs con coeficientes de interconexión constantes y funciones de activación diferenciables. El mismo autor menciona que un modelo más realista debe introducir retardos:

"In herward implementation time delay occurs due to the finite switching speeds of the amplifiers.."

Modelos de RNA de tipo Hopfield con retardo $\tau > 0$ fueron introducidos y estudiados en

C. Mercuri, R. Westervelt, Phys. Rev. A. (1989)

C. Mercuri, F. Wagh, R. Westervelt, Phys D (1991)

- El retraso netardo es inofensivo.

R. D. Driver J. D. Equations (1976)

- El retraso induce inestabilidad

Y. Kueng Academic Press (1993)

J. Beber S. A. Campbell P. Priessche SIAM J App. Math
(1996)

- El retraso induce bifurcación de Hopf

T. Faria L. Magalhães J. D. E. (1995)

- El retraso induce oscilaciones caóticas

M. Gilli IEEE Trans. Circuit and Systems (1993)

B. Lemi-Weyda M. O. Walther Math. Nachr. (1996)

- El retardo induce sincronización

L. Huang, J. Wu Fields Inst. Commun. (2001)

T. Krisztin, H. O. Wattoo, J. Wu Fields Inst. Monographs
(1999)

- El retardo produce pérdida de sincronización

Y. Chen, T. Krisztin, J. Wu - J. D. Equations (1999)

- El retardo induce oscilaciones transitorias.

K. Pakdaman, C. Grotte - Ragazzo, C. Melta Phys. Rev. E
(1998)

- El retardo modifica la base de atracción

K. Pakdaman, C. Grotta - Ragazzo, C. Melta, O. Arino,
J. Vibert Neural Network (1998)

R.N.A de tipo Hopfield:

$$(R.N.1) \quad \frac{du}{dt}(t) = -Bu(t) + Ag(u(t)) + J$$

$$(R.N.2) \quad \frac{du}{dt}(t) = -Bu(t) + Ag(u(t-z)) + J$$

$$(R.N.3) \quad \frac{du_i}{dt} = -b_i u_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} g_j(u_j(t-z_{ij})) + J_i$$

K. Gopalsamy, X. He

Physica D (1994)

$$(H1) \quad g_j \in C^1(\mathbb{R}), \quad g_j'(x) > 0, \quad g_j'(0) = \sup_{x \in \mathbb{R}} g_j'(x)$$

$$(H2) \quad g_j(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} g_j'(x) = \pm 1$$

$$(A1) \quad |g_j(u_j) - g_j(v_j)| \leq L_j |u_j - v_j| \quad u_j, v_j \in \mathbb{R}$$

$$(A2) \quad |g_j(x)| \leq M_j, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(H1^*) \quad 0 < g_j'(x) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} g_j'(x) < +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Teorema Supongamos que se verifican (A_1) , (A_2) ; $z_{ij} \geq 0$
 $i, j = 1, \dots, n$. Si

$$\alpha = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \frac{L_j}{b_j} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right\} < 1$$

entonces, para todo input J , el sistema (RN.3) tiene un único equilibrio u^* que es globalmente asintóticamente estable, independientemente del retardo.

La prueba usa un teorema de punto fijo y el funcional de Lyapunov

$$V(u)(t) = \sum_{i=1}^n (|u_i(t) - u_i^*| + \sum_{j=1}^n |a_{ij}| L_j \int_{t-z_{ij}}^t |u_j(s) - u_j^*| ds)$$

Recordemos el valor de la norma espectral de una matriz.

$$\|Z\|_2 = \left(\max \{ \lambda \mid \lambda \text{ es valor propio de } Z^T Z \} \right)^{1/2}$$

P. Driessche, X. Zou SIAM J. Appl. Math (1998)

Teorema Supongamos que se verifican (A_1) , (A_2) con $z_{ij} \geq 0$

$i, j = 1, \dots, n$. Si

$$\beta = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{1}{b_i} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right\} + \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ L_j^2 \sum_{i=1}^n \frac{|a_{ij}|}{b_i} \right\} < 2$$

entonces, para todo input J , el sistema (R.N.3) tiene un único equilibrio u^* que es globalmente asintóticamente estable independiente del retardo

Prueba: Sea $\Psi(u) = B^{-1}A g(u) + BJ^{-1}$, $u \in \mathbb{R}^n$

$$\|\Psi(u) - B^{-1}J\|_2 \leq \|B^{-1}A\|_2 \|g(u)\|_2 \leq M \|B^{-1}A\|_2 = M^*$$

La aplicación Ψ transforma la bola cerrada

$$\Omega = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \|u - B^{-1}J\|_2 \leq M^*\}$$

en sí misma. El teorema de Brouwer garantiza que Ψ tiene un punto fijo u^* que es un equilibrio

Para probar la estabilidad asintótica haremos $x(t) = u(t) - u^*$

Entonces
$$\frac{dx_i}{dt} = -b_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t - z_{ij})) \quad i=1, \dots, n.$$

donde $f_j(x_j) = g_j(x_j + u_j^*) - g_j(u_j^*)$

Definimos
$$V(x)(t) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{b_i} x_i^2(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{|a_{ij}|}{b_i} \int_{t-z_{ij}}^t f_j^2(x_j(s)) ds.$$

Se verifica
$$\frac{dV(x)(t)}{dt} = -(\alpha - \beta) \sum_{i=1}^n x_i^2(t)$$
 lo que prueba el teorema.

Teorema Supongamos que $(A_1), (A_2)$ se verifican con $z \geq 0$ en $(RN, 2)$. Si

$$\gamma = \frac{L}{b} \|A\|_2 < 1$$

donde $L = \max_{1 \leq i \leq n} L_i$ y $b = \min_{1 \leq i \leq n} b_i$ entonces para todo input J el sistema $(RN, 2)$ tiene un equilibrio que es globalmente asintóticamente estable, independiente del vector de retardos.

Criterios que dependen del retardo. Por simplicidad, denotemos $\beta_j = \sup_{x \in R} g'_{ij}(x)$, $W = (w_{ij})$, $Q = (q_{ij})$ donde

$$w_{ij} = a_{ij} \frac{b_i}{\sqrt{b_i b_j}} \quad \gamma \quad q_{ij} = a_{ij} \frac{b_i}{b_i} \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Teorema Supongamos que se verifiquen (A_1^*) y (A_2) .

Si una de las condiciones siguientes:

$$(i) \quad N_2(W) = \lambda_{\max} \left\{ \frac{W + W^T}{2} \right\} < 1$$

$$(ii) \quad N_1 \left(\frac{W + W^T}{2} \right) = \max_{1 \leq i \leq n} \left(w_{ii} + \sum_{j \neq i} \frac{|w_{ij} + w_{ji}|}{2} \right) < 1$$

$$(iii) \quad N_1(Q) = \max_{1 \leq i \leq n} \left(q_{ii} + \sum_{j \neq i} |q_{ij}| \right) < 1$$

es cierta entonces para todo input J , el sistema (RN.1) tiene un único equilibrio que es globalmente asintóticamente estable.

Con argumentos similares a los anteriores se prueba que para todo input J , (RN.2) tiene un equilibrio u^* .

Usando una función de Lyapunov, similar al método descrito en

K. Matsuoaka, Neural Networks, (1992)

$$V(x) = \sum_{i=1}^n \beta_i \int_0^{x_i} [g_i(s+u_i^*) - g_i(u_i^*)] ds, \quad x = u - u^*$$

se prueba la estabilidad evolutiva para (i).

(i) \Rightarrow (ii) Todo valor propio de una matriz simétrica es menor o igual que cualquiera de sus medidas

\Rightarrow como (iii) se deduce con los mismos argumentos anteriores empleando la función de Lyapunov

$$V(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{b_i} |x_i|, \quad x = (u - u^*) = (x_1, \dots, x_n).$$

Una cuestión importante consiste en saber si estos métodos son válidos para (RN.2) y (RN.3).

Se han probado resultados en esta dirección empleando la teoría monótona de sistemas dinámicos aplicada al semiflujo generado por ecuaciones diferenciales de retardo finito autónomas

P. Priessche, J. Wu, X. Zou Physica D, (2001)

Teorema Consideremos que se verifiquen $(H1), (H2)$, $b_j = g_j'(0) = \beta_j = 1$.

con $z_{ij} \geq 0$ para $i, j = 1, \dots, n$. Si además

$$(i) \quad N_1(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ a_{ii} + \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right\} < 1$$

$$(ii) \quad \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ a_{ii} + \sum_{j \neq i} \frac{|a_{ij}| + |a_{ji}|}{2} \right\} < 1$$

entonces para todo input J existe un único equilibrio

u^* que es globalmente asintóticamente estable suponiendo los retardos z_{ii} relativos a auto-conexiones a_{ii} negativas son

sufricientemente pequeños con $0 \leq z_{ii} \leq \frac{1}{1 - e^{-a_{ii}}}$.

Teoría monótona de sistemas dinámicos:

La conclusión fundamental de la teoría monótona para ecuaciones diferenciales autónomas es la quasi-convergencia:
convergencia genérica a equilibrios.

Requiere monotonía fuerte y propiedades razonables de compacidad.

M. Hirsch

SIAM J. Appl. Math. (1982)

H. Matano

J. Fac. Sci. Kyoto Univ (1984)

P. Polacik

J. Diff. Equations (1989)

P. Takac

Nonlinear Anal. (1990)

H. Smith

Amer Math. Society (1995)

Necesita el carácter irreducible de matrices adyuntas.

Se han obtenido resultados recientes en la teoría monótona de ecuaciones diferenciales no-autónomas.

J. Jiang, X. Zhao J. Reine Angew Math. (2005)

S. Novo, R. Obaya, A. Sanz J. Diff. Equations (2007)

Todos ellos utilizan formulación triangular

$$\tau: \mathbb{R}_+ \times \Omega \times X \mapsto \Omega \times X$$

$$(t, w, x) \longmapsto (wt, ut, w, x)$$

$(\Omega, \sigma, \mathbb{R})$ flujo minimal.

Requiere: Regiones del espacio fase con trayectorias

Uniformemente estables.

Soluciones acotadas son

NO REQUIERE MONOTONIA relativamente compactas FUERTE.

Consideremos el sistema no-autónomo de E.F.

$$y'_i = -a_i^0(t)y_i + \sum_{j=1}^n b_{ij}^0(t) g_j(y_j(t-z_{ij})) + c_i^0(t) \quad i=1, \dots, n$$

con funciones $a_i^0(t), b_{ij}^0(t), c_i^0(t) \quad i, j=1, \dots, n$ casi-periódicas.

Definimos $M^0: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n \times (n+2)}(\mathbb{R}), s \mapsto M^0(s) = [a_i^0(s), b_{ij}^0(s), c_i^0(s)]$

$M_t^0(s) = M^0(t+s)$. La envolvente de M es

$$\Omega = \Omega(M) = \text{cls} \{ M_t^0 \mid t \in \mathbb{R} \}; \quad \sigma: \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \Omega, (t, w) \mapsto w.t$$

Es posible definir un flujo en Ω por translación

Las soluciones de

$$y'_i = -a_i(w.t) + \sum_{j=1}^n b_{ij}(w.t) g_j(y_j(t-z_{ij})) + c_i(w.t) = G(w.t, y_t)$$

definen un semiflujo $\mathbb{R}_+ \times \Omega \times X \rightarrow \Omega \times X, (t, w, x) \mapsto (w.t, u(t, w, x))$

C. Nuñez,

R. Obaya,

A. Sanz

J. Diff. Equations (2011).

Introducimos el orden exponencial en este contexto

H. Smith, H. Thieme J. Diff. Equations (1993)

S. Novo, R. Obaya, V. Villarroel SIAM J. Math. Anal. (2009)

Suponemos que D es una matriz quasipositiva, es decir $D = (d_{ij})$ y existe $\lambda > 0$ con $D + \lambda I \geq 0$ (en toda componente).

$X = [E - \tau D]$. El orden D -exponencial se define como

$$x_1 \leq_D x_2 \iff x_1 \leq x_2 \text{ y para } -\tau \leq s \leq t \leq 0$$

$$(x_2 - x_1)(t) \geq e^{D(t-s)} (x_2 - x_1)(s)$$

$$x_1 \prec_D x_2 \iff x_1 \leq_D x_2 \text{ y } x_1 \neq x_2.$$

Una ecuación neutral con D -operador lineal estable es una ecuación funcional de retardo infinito.

R. Obaya V. Villarroel J. Dyn. Diff. Equations (2011)

(G1) $G: \Omega \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua y localmente Lipschitz.

(G2) $G(w, x_2) - G(w, x_1) - D(x_2 - x_1)(0) \geq 0$ para $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \leq x_2$.

(G3) Las trayectorias son relativamente compactas y uniformemente estables para el orden \leq_0 en conjuntos acotados.

(G4) Si los elementos $(w, x_1), (w, x_2) \in \Omega \times X$, $x_1 \leq x_2$ admiten extensiones negativas $(w, t, u(t, w, x_1)), (w, t, u(t, w, x_2))$, $t \leq 0$ y existe $J \subset \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $x_{1i} = x_{2i}$ para $i \notin J$, $x_{1i}(s) < x_{2i}(s)$ para $i \in J$, $s \in [-\tau, 0]$ entonces $G_i(w, x_2) - G_i(w, x_1) - D(x_2 - x_1)(0)_i > 0$ para cada $i \in J$, $w \in \Omega$.

Teorema

Sea D una matriz que es positiva y supongamos (G1-G4) entonces existe para cada $(w, x) \in \Omega \times X$ una función continua $e_{w,x}: \Omega \rightarrow X$ tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t, w, x) - e(w, t)\| = 0$ y el minimal $K = \{(w^*, e_{w,x}(w^*)) \mid w^* \in \Omega\} \subset \Omega \times X$ define una copia de la base.

(H3) Los retardos z_{ii} correspondientes a coeficientes b_{ii}^0 negativos son pequeños, es decir $0 \leq z_{ii} \leq \frac{1}{\|a_i^0 + e b_{ii}^0\|_\infty}$ para todo $i=1, 2, \dots, n$.

(H4) Las conexiones entre cada par de neuronas distintas es excitatoria; es decir $b_{ij}^0(t) \geq 0$ $i, j=1, \dots, n$, $i \neq j$.

Proposición Supongamos que la E.F. verifica (H1-H4). Existe una matriz diagonal D tal que

- (i) el semiflujo es monótono para el orden D -exponencial y
- (ii) el semiflujo verifica la hipótesis (G-4).

$$G_X(w, x_1)(x_2) - D x_2(t) \geq \left[(\gamma_i - \alpha_i(w)) e^{-\gamma_i z_{ii}} - b_{ii}^-(w) \right] x_2(-z_{ii})$$

para $x_1, x_2 \in X$, $0 \leq_D x_2$. Finalmente $D = \text{diag} \{ -\gamma_1, \dots, -\gamma_n \}$
 $\gamma_i = \|a_i^0 + e b_{ii}^0\|_\infty$, $i=1, \dots, n$.

Proposición Supongamos que la E.F. verifica (H1-H4)

(i) Supongamos que existe $k \in \mathbb{R}$ con $G(w, \hat{k}) \leq \bar{0}$ para cada $w \in \Omega$ entonces $u(t, w, \hat{k}) \leq_D \hat{k}$ para todo $w \in \Omega, t \geq 0$.

Además si $G(w, \hat{k}) \ll 0$ para cada $w \in \Omega$ entonces existe $c > 0$ tal que $u(t, w, \hat{k}) \leq_D \hat{k} - \hat{c}$ para todo $w \in \Omega, t \geq \tau + 1$.

(ii) Supongamos que existe $K \in \mathbb{R}$ con $\bar{0} \leq G(w, \hat{K})$ para cada $w \in \Omega$ entonces $\hat{K} \leq_D u(t, w, \hat{K})$ para todo $w \in \Omega, t \geq 0$.

Además si $\bar{0} \ll G(w, \hat{K})$ para cada $w \in \Omega$ entonces existe $c > 0$ tal que $\hat{K} + \hat{c} \leq_D u(t, w, \hat{K})$ para todo $w \in \Omega, t \geq \tau + 1$.

Este resultado permite situar a los subconjuntos minimaler en el espacio fase. En nuestro caso existe $k_0 \in \mathbb{R}$ tal que (i), (ii) se verificuen para $|k| > |k_0|$

Consideremos las hipótesis (H1-H3).

Introducimos las nuevas variables $y_{n+i} = -y_i, i=1, \dots, n$.

$$y_i' = -a_i(wt) y_i(t) + b_{ii}(wt) g_i(y_i(t-z_{ii})) + \sum_{j=1, j \neq i}^n b_{ij}^+(wt) g_j(y_j(t-z_{ij})) + \sum_{j=1, j \neq i}^n b_{ij}^-(wt) \tilde{g}_j(y_{n+j}(t-z_{ij})) + c_i(w, t) = G_1(wt, y_t) + C(wt)$$

$$y_{n+i}' = -a_i(wt) y_{n+i}(t) + b_{ii}(wt) g_i(y_{n+i}(t-z_{ii})) + \sum_{j=1, j \neq i}^n b_{ij}^+(wt) \tilde{g}_j(y_{n+j}(t-z_{ij})) + \sum_{j=1, j \neq i}^n b_{ij}^-(wt) g_j(y_j(t-z_{ij})) - c_i(wt) = G_2(wt, y_t) - C(wt).$$

con $\tilde{g}_i(x) = -g_i(-x)$. Este sistema es monotónico para el orden D-exponencial y permite situar a los mínimos en el espacio fase.

C. Cosner dyn. Cont. Discrete Impuls. Syst. (1997)

J. Wu, X.Q. Zhao Proc. Amer. Math. Society (1998)

Necesitamos condiciones que garanticen "estabilidad"

Definición Fijemos $\Gamma > 0$ con $\|C\|_{\infty} \leq \Gamma$.

1) Definimos $\rho(\Gamma)$ como el inferior de los números positivos k_1 tales que para $k \geq k_1$

$$G_1(w, \hat{R}_{2n}) \ll -\bar{\Gamma} \quad G_2(w, \hat{R}_{2n}) \ll -\bar{\Gamma}$$

$$\bar{\Gamma} \ll G_1(w, -\hat{R}_{2n}), \quad \bar{\Gamma} \leq G_2(w, -\hat{R}_{2n})$$

2) Para $i=1, \dots, n$ definimos $\delta_i(\Gamma) = \inf \{g'_i(s) \mid |s| \leq \rho(\Gamma)\} > 0$

Introducimos el sistema de E.F. lineales (EFL)

$$z'_i = -a_i(wt)z_i(t) + \left[b_{ii}(wt) - \delta_i(\Gamma) b_{ii}(wt) \right] z_i(t - z_{ii}) \\ + \sum_{\substack{j=1, j \neq i \\ j=1, j \neq i}}^n (b_{ij}(wt)) z_j(t - z_{ij}) = F(wt, z_t)$$

(E.F.L) es uniformemente estable (resp. exponencialmente estable) si y sólo si el sistema lineal monótono duplicado $\tilde{z}_{n+i} = z_i, i=1, \dots, n$.

$$z'_i = -a_i(w, t) z_i(t) + [b_{ii}^+(w, t) - \delta_i(r) b_{ii}^-(w, t)] z_i(t - z_{ii}) + \sum_{j=1, j \neq i}^n b_{ij}^+(w, t) z_j(t - z_{ij}) + \sum_{j=1, j \neq i}^n b_{ij}^-(w, t) z_{n+j}(t - z_{ij})$$

$$z'_{n+i} = -a_i(w, t) z_i(t) + [b_{ii}^+(w, t) - \delta_i(r) b_{ii}^-(w, t)] z_{n+i}(t - z_{ii}) + \sum_{j=1, j \neq i}^n b_{ij}^+(w, t) z_{n+j}(t - z_{ij}) + \sum_{j=1, j \neq i}^n b_{ij}^-(w, t) z_j(t - z_{ij})$$

es uniformemente estable (resp. exponencialmente estable)

Teorema. Supongamos que la E.F. verifica (H1-H3) y adem\u00e1s la familia de sistemas lineales (E.F.L.) es exponencialmente estable. Entonces para todo input ζ con $\|\zeta\|_\infty \leq r$ existe una funci\u00f3n continua invertible $e: \Omega \rightarrow X$ tal que para todo $(w, x) \in \Omega \times X$ se tiene

$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t, w, x) - e(w, t)\| = 0$
 y $K = \{ (w, e(w, t)) \mid w \in \Omega \}$ es un m\u00ednimo copia de la base.

Corolario Supongamos que la E.F. verifica que (H1-H3)

y que existen números estrictamente positivos $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ con

$$\lambda_i (-a_i^0(t) - \delta_{i(n)} b_{ii}^{0-}(t)) + b_{ii}^{0+}(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^n \lambda_j |b_{ij}^0(t)| < -\lambda_0$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, $i=1, \dots, n$. Entonces para todo input casi-periódico $C^0(t)$ con $\|C\|_\infty \leq r$ existe una función casi-periódica única $e^0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in X$ se tiene

$$f(w, u(t, w, x)) - e^0(t) = 0$$

donde el límite anterior decae exponencialmente.

Prueba Se verifica

$$\lambda_i (-a_i(w) - \delta_{i(n)} b_{ii}^{0-}(w)) + b_{ii}^{0+}(w) + \sum_{j=1, j \neq i}^n \lambda_j |b_{ij}^0(w)| < -\lambda_0$$

Para $k > 0$ definimos $\hat{\lambda}_k(x) = k \cdot (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ si $x \in [-r, 0]$

Entonces $F(w, \hat{\lambda}_k) < 0$, $F(w, -\hat{\lambda}_k) > 0$, $\forall w \in \mathbb{R} - \lambda_0$.

El sistema lineal (E.F.L) es exponencialmente estable.

Esto prueba el papel estabilizante de las autoconexiones inhibitorias rápidas

Criterios basados en la localización de los conjuntos minimales.

Suponemos las hipótesis (H1-H4) y $0 < \bar{r}^1 \leq C^0(H) \leq \bar{r}$.

Definición (i) Definimos p^+ como el inferior de las constantes positivas k_1 con $F(w, \hat{k}) < \bar{\sigma} \quad \forall k \geq k_1$.

(ii) Definimos p^- como el superior de las constantes positivas k_1 con $\bar{\sigma} < F(w, \hat{k})$ para todo $0 < k \leq k_1$.

(iii) Para $i=1 \dots n$, definimos

$$\delta_i^+ = \sup \{ f_i'(s) \mid p^- \leq s \leq p^+ \}$$

$$\delta_i^- = \inf \{ f_i'(s) \mid p^- \leq s \leq p^+ \}$$

Se verifica que $\hat{p}^- \leq 0 \leq \hat{p}^+$ para todo $(w, +1/K)$ minimal.

Teorema Supongamos que la E. F. verifica las condiciones anteriores y la familia de sistemas lineales (E. F. L.) es exponencialmente estable. Entonces existe una función continua invariante $e: \Omega \mapsto X$ tal que para todo $(w, x) \in \Omega \times X, 0 \leq t$ se tiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t, w, x) - e(w, t)\| = 0$$

y $K^+ = \{(w, e(w)) \mid w \in \Omega\}$ es una copia de la base con $\hat{p}^- \leq_0 e(w) \leq_0 \hat{p}^+$ para todo $w \in \Omega$.

Es suficiente con demostrar la propiedad de estabilidad (G.4) en la región $\Omega \times \{\hat{p}^- \leq_0 x \leq_0 \hat{p}^+\}$ que contiene el omega-limite de todas las trayectorias. Este omega-limite es el conjunto K .

Corolario Supongamos que (E.F.) verifica las condiciones anteriores y que existen números estrictamente positivos $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ con

$$\lambda_i (-a_i^0(t) - \delta_i^- b_{ii}^{0-}(t) + \delta_i^+ b_{ii}^{0+}(t)) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \lambda_j \delta_j^+ b_{ij}^0(t) < -\lambda_0$$

para todo $t \in \mathbb{R}, i=1, \dots, n$. Entonces existe una única función casi-periódica $e^0: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ tal que para todo $x \in X$ $0 \leq x$ se tiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u^0(t, x) - e^0(t)\| = 0$$

donde el límite decae de forma exponencial.

El enunciado prueba el papel estabilizante del input positivo cuando la red es monótona.

El teorema no prueba la existencia de un único minimal exponencialmente estable. Este resultado sólo es cierto en algunos casos.